

## 2. Vibrazioni longitudinali nelle barre

Si richiama, all'interno di questo paragrafo, l'analisi delle vibrazioni longitudinali di barre nell'intorno della configurazione di equilibrio statico.

Si ipotizzi, che le dimensioni caratteristiche della sezione retta siano trascurabili rispetto alla dimensione longitudinale della barra e che sezione, densità e modulo di elasticità si mantengano costanti lungo lo sviluppo longitudinale della barra stessa.

Sotto queste ipotesi, un elemento di barra lungo  $dx$  posto a distanza  $x$  dall'estremo di sinistra della sbarra sarà soggetto ad una deformazione assiale pari a:

$$\varepsilon = \frac{u + \frac{\partial u}{\partial x} - u}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (\text{A.1})$$

In cui si è indicato con  $u(x)$  lo spostamento longitudinale in corrispondenza della generica sezione.

Considerando la legge di Hooke, detta  $S$  la forza assiale agente sulla barra è possibile calcolare la tensione assiale  $\sigma$  che insiste sulla sezione retta della barra stessa tramite la:

$$\sigma = \frac{S}{A} = \varepsilon E = E \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \quad (\text{A.2})$$

In cui  $S$  è la forza assiale sulla barra ed  $E$  è il modulo elastico.

Derivando ulteriormente ed ordinando si ottiene:

$$\frac{\partial S}{\partial x} = AE \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (\text{A.3})$$

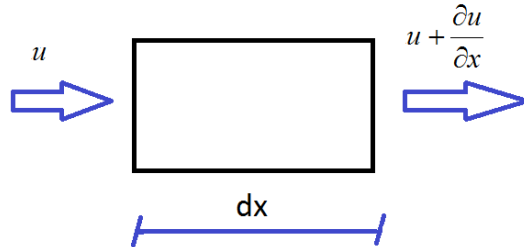


Figura A.1: deformazione assiale di un elemento di barra

Poiché le vibrazioni longitudinali nelle barre sono un problema dinamico, la forza assiale agente sulla sezione retta della barra sarà, in generale, funzione dello spazio e del tempo:

$$S = S(x, t) \quad (\text{A.4})$$

Considerando l'equilibrio dinamico alla traslazione in direzione longitudinale di un elemento infinitesimo di barra su cui agiscono, come è noto, sia l'azione assiale sia la forza di inerzia, si ottiene:

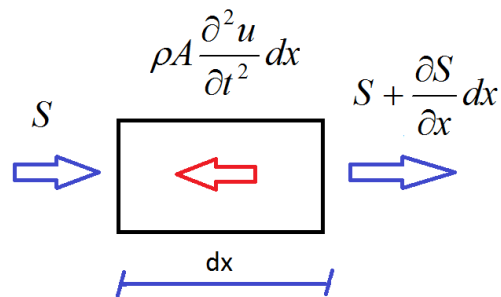


Figura A.2: equilibrio dinamico su un elemento di barra

$$-S + S + \frac{\partial S}{\partial x} dx - \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx = 0 \quad (\text{A.5})$$

In cui  $A$  è la sezione retta della barra e  $\rho$  è la sua densità. Sostituendo l'equazione (A.3) nella (A.5) e riordinando si ha:

$$AE \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (\text{A.6})$$

Definita la velocità di propagazione in senso longitudinale delle onde (velocità ideale dell'onda di lunghezza d'onda infinita) come:

$$c = \sqrt{\frac{AE}{\rho A}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (\text{A.7})$$

L'equazione (A.6) può essere scritta come segue:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (\text{A.8})$$

Tale equazione differenziale è una equazione differenziale del secondo ordine alle derivate parziali e definisce il moto longitudinale  $u(\xi, t)$  della barra presa in considerazione. Sebbene non abbia alcun utilizzo pratico nelle analisi effettuate tramite barra di Hopkinson conduce alla determinazione della velocità teorica delle onde di pressione per un'onda di lunghezza infinita. Tale velocità verrà utilizzata nei paragrafi a seguire per calcolare deformazione e velocità di deformazione lungo il provino.

## 2.1 Definizioni:

*Impedenza acustica* =  $\rho c$  chiamata anche impedenza caratteristica del materiale

*Impedenza meccanica* =  $\rho c A$ . Correlata alle proprietà del materiale ed alla sezione retta della barra snella presa in considerazione

*Velocità della particella* = definita come la velocità delle parti in movimento (o particelle) relativamente alla velocità iniziale di traslazione

*Velocità del suono* = la velocità alla quale il segnale passa o si propaga lungo un corpo o tra particella a particella

## 2.2 Equazioni fondamentali delle onde elastiche lungo barre sottili <sup>1</sup>

L'equazione (A.8) ha soluzione generale nella forma:

$$u(x,t) = f(x - ct) + g(x + ct) \quad (\text{A.9})$$

Tale soluzione è detta **Soluzione di D'Alembert**.  $f$  e  $g$  descrivono la forma degli impulsi che si propagano nelle direzioni positiva e negativa lungo l'asse della barra ad una velocità  $c$ .

- $f(x - ct)$  è un'onda che viaggia in direzione positiva ad una velocità pari a

$$c = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

- $g(x+ct)$  è un'onda che viaggia in direzione negativa ad una velocità pari a

$$c = -\frac{dx}{dt} = -\sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

---

<sup>1</sup> Basato su Nik Petrinic – Inpact Engineering lecture notes (University of Oxford)

Tensioni e le velocità delle particelle, per le onde di tensione viaggianti rispettivamente in direzione positiva e negativa sono correlate dalle equazioni seguenti:

$$\bullet \quad \frac{\sigma}{E} + \frac{v}{c} = 0 \quad \text{per} \quad \frac{dx}{dt} = c \quad \text{onda di tensione "positiva"} \quad (\text{A.10})$$

$$\bullet \quad \frac{\sigma}{E} - \frac{v}{c} = 0 \quad \text{per} \quad \frac{dx}{dt} = -c \quad \text{onda di tensione "negativa"} \quad (\text{A.11})$$

Richiamando l'equazione (A.7) segue che per un'onda di tensione che si propaga all'interno di una barra precedentemente stazionaria e non soggetta a tensioni si ha:

$$\sigma = \pm \rho c v \quad \text{per} \quad \frac{dx}{dt} = \mp c \quad (\text{A.12})$$

Le deformazioni assiali elastiche lungo la barra sottile possono essere espresse come:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \pm \frac{v}{c} \quad \text{per} \quad \frac{dx}{dt} = \mp c \quad (\text{A.13})$$

Se la barra è in movimento ad una velocità  $v_0$  prima dell'impatto, le equazioni (A.12) ed (A.13) possono essere riscritte come:

$$\sigma = \pm \rho c \Delta v \quad \text{per} \quad \frac{dx}{dt} = \mp c \quad (\text{A.12b})$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \pm \frac{\Delta v}{c} \quad \text{per} \quad \frac{dx}{dt} = \mp c \quad (\text{A.13b})$$

In cui  $\Delta v = v - v_0$

In alcuni casi, tipicamente nel caso di riflessioni alle estremità è necessario comprendere l'avvenuta sovrapposizione di onde incidenti e riflesse. Ciò può essere agevolmente

ottenuto considerando il **Metodo delle Caratteristiche**. Tale metodo permette la decomposizione della (A.8), equazione differenziale del secondo ordine in equazioni differenziali del secondo ordine parziali, che, a loro volta, sono trasformate in equazioni differenziali di tipo ordinario. I risultati dell'applicazione del metodo delle caratteristiche alle onde elastiche in barre sottili è riassunto dalle equazioni seguenti:

- $\frac{\sigma}{E} - \frac{v}{c} = \frac{2\alpha}{E}$  per  $\frac{dx}{dt} = c$  onda di tensione “positiva” (A.14)

- $\frac{\sigma}{E} + \frac{v}{c} = \frac{2\beta}{E}$  per  $\frac{dx}{dt} = -c$  onda di tensione “negativa” (A.15)

- $\sigma = \beta + \alpha$  (A.16)

- $\rho cv = \beta - \alpha$  (A.17)

In cui  $\alpha$  e  $\beta$  sono costanti aventi unità di misura delle tensioni che rappresentano l'ampiezza delle tensioni rispettivamente per le onde che si propagano in direzione positiva e negativa lungo un sistema di riferimento coassiale alla barra presa in considerazione (vedi figura A.3).

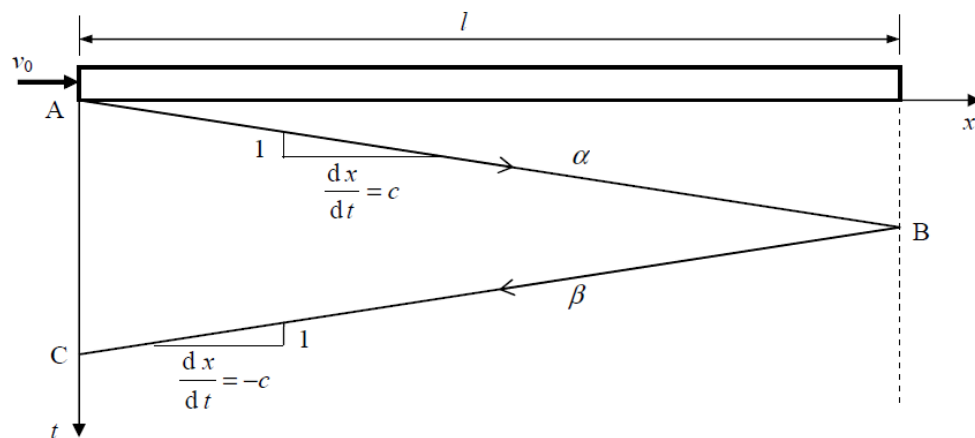


Figura A.3 – Onde di tipo  $\alpha$  e  $\beta$  in una barra sottile (diagramma di Lagrange)

## 2.3 Impatto tra due barre coassiali <sup>2</sup>

In caso di impatto tra due barre coassiali devono essere verificate le seguenti condizioni all'interfaccia:

- Le particelle di ognuna delle due barre viaggiano alla stessa velocità  $v$
- Le forze  $F$  agenti alle in corrispondenza delle aree di contatto devono eguagliarsi

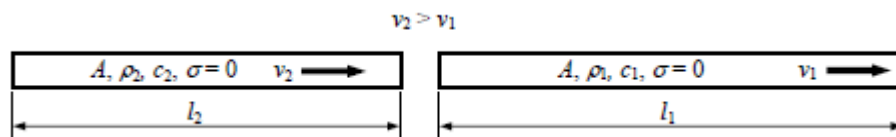


Figura A.4 – condizioni di impatto

Una volta avvenuto l'impatto due vengono generate due onde di compressione nelle due barre, che viaggiano lungo queste ultime a velocità  $c_1$  e  $c_2$  (vedi figure A.4 ed A.5)

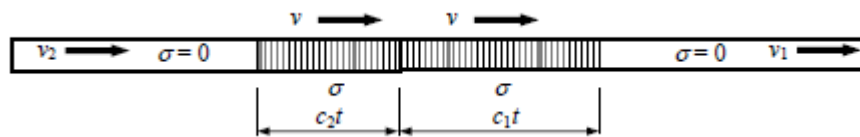


Figura A.5 – propagazione delle onde di compressione dopo l'impatto

Se le barre impattanti sono caratterizzate da diverse impedenze acustiche ma stessa sezione retta la condizione di continuità implica che le particelle all'interfaccia viaggino alla stessa velocità e la condizione di equilibrio implica che le tensioni all'interno delle due barre siano identiche. È quindi possibile scrivere la seguente equazione:

<sup>2</sup> Basato su Nik Petrinic – Inpact Engineering lecture notes (University of Oxford)

$$\rho_1 c_1 (v - v_1) = \rho_2 c_2 (v_2 - v) \quad (\text{A.18})$$

Risolvendo la (A.18) rispetto a  $v$  si ottiene:

$$v = \frac{\rho_1 c_1 v_1 + \rho_2 c_2 v_2}{\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2} \quad (\text{A.19})$$

Sostituendo ‘ $v$ ’ nella (A.18) si ottiene la tensione che ne deriva::

$$\sigma = \frac{v_2 - v_1}{\frac{1}{\rho_1 c_1} + \frac{1}{\rho_2 c_2}} \quad (\text{A.20})$$

Se le barre coassiali soggette a impatto sono costituite dello stesso materiale le equazioni (A.19) ed (A.20) si riducono a:

$$v = \frac{v_1 + v_2}{2} \quad (\text{A.21})$$

$$\sigma = \frac{\rho c (v_2 - v_1)}{2} \quad (\text{A.22})$$

Se ‘ $v_1$ ’ è inizialmente nulla, le equazioni (A.21) ed (A.22) si riducono ulteriormente in:

$$v = \frac{v_2}{2} \quad (\text{A.23})$$

$$\sigma = \frac{\rho c v_2}{2} \quad (\text{A.24})$$

La lunghezza delle onde di tensione conseguenti all’impatto dell’impattore (barra 2) sulla barra stazionaria è pari a (barre caratterizzate da pari impedenza meccanica):

$$t_{wave} = \frac{2l_2}{c_2} \quad (\text{A.25})$$



## 2.4 Riflessione delle onde di tensione in corrispondenza di estremità libere <sup>3</sup>

Quando un'onda di tensione viene generata all'estremità di una barra, viaggia lungo la barra ed infine raggiunge l'altra estremità della barra stessa, le sue condizioni in termini di tensioni e velocità delle particella all'estremità sono determinate dalle condizioni di equilibrio e congruenza.

Si immagini che una barra stazionaria non vincolata sia colpita da un impattore e che tale impatto produca una velocità della particella  $v_0$  all'estremità della barra. Secondo le equazioni (A.16) ed (A.17) le condizioni di tensione che ne conseguono sulla barra impattata possono essere determinate da:

$$\rho c v_0 = \beta - \alpha = 0 - \alpha = -\alpha \quad (\text{A.26})$$

$$\sigma = \beta + \alpha = 0 + \alpha = -\rho c v_0 \quad (\text{A.27})$$

In cui il segno negativo denota che ci si riferisce a onde di compressione:

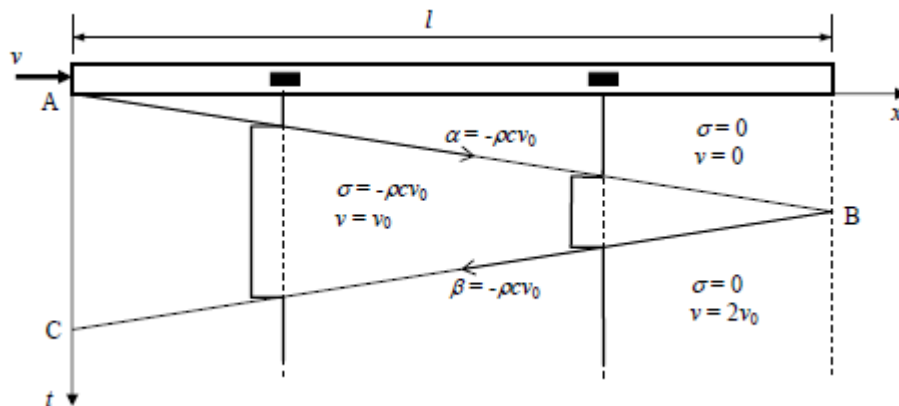


Figura A.6 – riflessione delle onde in corrispondenza di estremità libere (diagramma di Lagrange)

<sup>3</sup> Nik Petrinic – Impact Engineering lecture notes (University of Oxford)

Dopo un tempo  $t = \frac{l}{c}$  l'onda di tensione raggiunge l'estremità libera della barra ed è riflessa come un'onda di tipo  $\beta$  che si propaga ad una velocità pari a  $\frac{dx}{dt} = -c$ . L'estremità libera non reagisce a tensione. Quest'ultima condizione implica che:

$$\sigma = \beta + \alpha = 0 \quad (\text{A.28})$$

Per cui l'ampiezza dell'onda di tensione riflessa e la velocità delle particelle all'estremità libera possono essere determinate dalle:

$$\beta = -\alpha \quad (\text{A.29})$$

$$\rho cv = \beta - \alpha = \rho cv_0 - (-\rho cv_0) = 2\rho cv_0 \quad (\text{A.30})$$

Che è possibile scrivere:

$$\beta = -\alpha \quad (\text{A.31})$$

$$v = 2v_0 \quad (\text{A.32})$$

La riflessione di un'onda che si propaga in corrispondenza di una estremità libera produce un'onda riflessa di segno opposto all'onda incidente (un'onda di compressione viene riflessa come un'onda di tensione e viceversa) mentre l'ampiezza della velocità delle particelle in corrispondenza dell'estremità libera risulta doppia rispetto alla velocità delle particelle in corrispondenza dell'estremità impattata.

## 2.5 Riflessione delle onde di tensione ad una estremità incastrata <sup>4</sup>

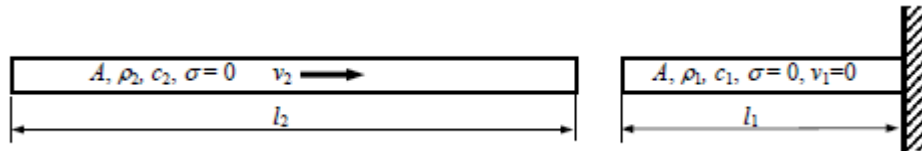


Figure 7 – wave reflection at a fixed end: before impact

In questo caso la condizione al contorno all'estremità vincolata impone che la velocità delle particelle sia nulla. Di conseguenza, secondo l'equazione (A.16) si ha:

$$\rho c v_0 = \beta - \alpha = 0 \quad (\text{A.33})$$

L'onda di tensione riflessa è caratterizzata da un'ampiezza data da (vedi equazioni (A.26) ed (A.27)) :

$$\beta = \alpha = -\rho c v_0 \quad (\text{A.34})$$

Quindi, dopo la riflessione le onde di tipo  $\alpha$  e  $\beta$  si sovrappongono generando una condizione di tensione totale pari a (vedi figura A.9)

$$\sigma = \beta + \alpha = \beta + \alpha = -2\rho c v_0 \quad (\text{A.35})$$

<sup>4</sup> Nik Petrinic – Impact Engineering lecture notes (University of Oxford)

La riflessione di un'onda di tensione in corrispondenza di una estremità fissa produce un'onda riflessa avente ampiezza e segno pari a quelli dell'onda incidente (un'onda di compressione viene riflessa come un'onda di compressione ed un'onda di tensione si riflette come un'onda di tensione). La sovrapposizione delle onde di tipo  $\alpha$  e  $\beta$  fa sì che l'ampiezza delle tensioni risulti raddoppiata.

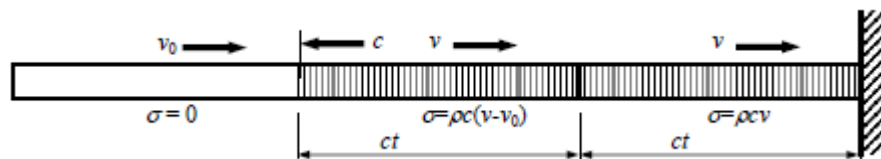


Figura A.8 – riflessione in corrispondenza di una estremità fissa (prima della riflessione)

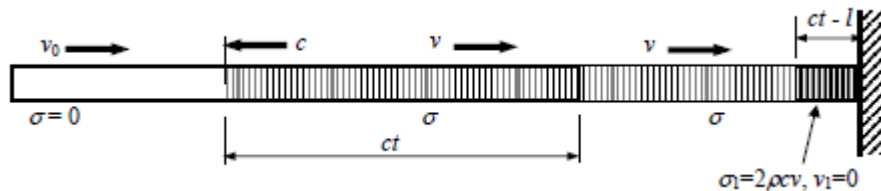


Figura A.9 – riflessione in corrispondenza di una estremità fissa (dopo la riflessione)

## 2.6 Riflessioni e trasmissioni in corrispondenza di discontinuità <sup>5</sup>

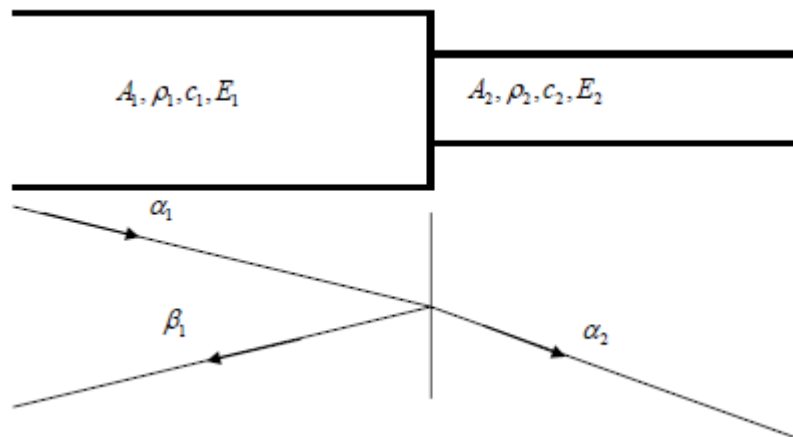
Lo scopo di questa sezione è quello di descrivere il comportamento di un'onda di tensione qualora questa incontri una discontinuità. Il raggiungimento da parte di un'onda di tensione di una discontinuità è solitamente esaminato in termini di impedenza

<sup>5</sup> Nik Petrinic – Impact Engineering lecture notes (University of Oxford)

meccanica. L'impedenza meccanica di un punto di una struttura è definita come il rapporto tra la forza applicata in questo punto e la velocità conseguente nel punto stesso:

$$z = \frac{F}{v} = \rho c A \quad (\text{A.36})$$

In cui  $\rho$ ,  $c$  ed  $A$  rappresentano rispettivamente la densità, la velocità longitudinale di propagazione delle onde e la sezione retta del tratto di barra preso in considerazione. Si noti come tutte le variabili che influenzano l'impedenza meccanica siano proprietà fisiche e che l'evento l'impatto non modifica impedenza. Inoltre per un determinato materiale si ha una variazione di impedenza soltanto qualora si abbia una variazione della sezione retta.



**Figura A.10 – Riflessione e trasmissione di onde di tensione in corrispondenza di discontinuità**

Quando un'onda incidente ( $\alpha_1$ ) incontra una discontinuità essa risulta parzialmente riflessa ( $\beta_1$ ) e parzialmente trasmessa ( $\alpha_2$ ). La quantità di onda trasmessa o riflessa dipende dalla differenza di impedenza all'interfaccia. Per determinare le ampiezze delle onde di tensione e, quindi, la frazione di onda che risulta riflessa e trasmessa in corrispondenza della discontinuità, è necessario comprendere le dinamiche di quanto avviene in corrispondenza dell'interfaccia. Le velocità delle particelle immediatamente a destra ed a sinistra dell'interfaccia devono essere identiche, dal momento che esse

risultano continuamente in contatto. Le forze immediatamente a destra ed a sinistra della discontinuità devono essere tali da soddisfare le condizioni di equilibrio:

$$v_1 = v_2 \quad (\text{A.37})$$

$$\sigma_1 A_1 = \sigma_2 A_2 \quad (\text{A.38})$$

L'introduzione delle equazioni (A.16) ed (A.17) nelle (A.37) ed (A.38) produce:

$$A_1(\alpha_1 + \beta_1) = A_2 \alpha_2 \quad (\text{A.39})$$

$$\frac{\beta_1 - \alpha_1}{\rho_1 c_1} = \frac{-\alpha_2}{\rho_2 c_2} \quad (\text{A.40})$$

Risolvendo rispetto ad  $\alpha_2$  e  $\beta_1$  si ha:

$$\alpha_2 = \left( \frac{2z_2}{z_1 + z_2} \right) \left( \frac{A_1}{A_2} \right) \alpha_1 \quad (\text{A.41})$$

$$\beta_1 = \left( \frac{z_2 - z_1}{z_1 + z_2} \right) \alpha_1 \quad (\text{A.42})$$

In cui  $z_1$  e  $z_2$  sono le impedenze meccaniche delle barre immediatamente a destra ed a sinistra dell'interfaccia. In caso di eguaglianza delle impedenze ( $z_1 = z_2$ ) l'intera onda incidente risulta trasmessa e non si hanno riflessioni.

Se la densità e la velocità del suono delle due barre all'interfaccia si mantengono, l'amplificazione o la riduzione delle tensioni è determinata esclusivamente dal rapporto  $r = \frac{A_2}{A_1}$  tra le sezioni rette prima e dopo la discontinuità. L'ampiezza delle onde riflessa e trasmessa è data dalle seguenti equazioni:

$$r = \frac{A_2}{A_1} \quad (\text{A.43})$$

$$\beta_1 = \left(\frac{r-1}{1+r}\right) \alpha_1 \quad (\text{A.44})$$

$$\alpha_2 = \left(\frac{2}{1+r}\right) \alpha_1 \quad (\text{A.45})$$

Valori di  $r$  pari a zero ed infinito producono risultati identici a quelli ottenuti nelle sezioni “Riflessione delle onde di tensione in corrispondenza di estremità libere” e “Riflessione delle onde di tensione ad una estremità incastrata”.