

GIUSEPPE TOMMASO DI VENTI

MODELLAZIONE NUMERICA DELLA NASCITA E  
DELLO SVILUPPO DI INTERFACCE MEDIANTE IL  
METODO DELLE DISCONTINUITÀ FORTI  
INTRAELEMENTO

Tesi per il conseguimento del titolo di Dottore di Ricerca



**UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA**  
DOTTORATO DI RICERCA IN INGEGNERIA DELLE STRUTTURE  
XXIII ciclo

10 Dicembre 2011

Dottorato di Ricerca in Ingegneria delle Strutture  
XXIII Ciclo  
Università degli Studi di Catania  
Facoltà di Ingegneria  
Dipartimento di Ingegneria Civile e Ambientale  
Viale Andrea Doria, 6  
95125 Catania

Il tutor

Prof. Ing. Loredana Contrafatto

Il Coordinatore

Prof. Ing. Giuseppe Oliveto

*A mio Padre,  
a mia Madre,  
ed a mia sorella Vanessa*



# Ringraziamenti

Ringrazio la Prof. Loredana Contrafatto che, con pazienza e dedizione, mi ha guidato giorno per giorno durante le fasi di studio, fornendomi gli strumenti culturali per affrontare le tematiche di ricerca discusse in questa tesi. La ringrazio inoltre per l'incoraggiamento datomi nei momenti di difficoltà professionale e personale incontrati durante il Dottorato.

Ringrazio il Prof. Massimo Cuomo per i preziosi suggerimenti che mi ha fornito durante lo sviluppo di questo lavoro.

Desidero infine ringraziare la mia famiglia, che mi ha costantemente accompagnato nel mio percorso di vita, sostenendomi sia nella quotidianità, sia nelle serie difficoltà che hanno insidiato questo periodo di studi.

G.T. DI VENTI



# Indice

<b>1</b>	<b>STATO DELL'ARTE</b>	<b>1</b>
1.1	Scale dimensionali . . . . .	2
1.2	Comportamento dei materiali . . . . .	4
1.3	Approcci classici . . . . .	5
1.3.1	Meccanica della frattura lineare elastica . . . . .	5
1.3.2	Approccio con fratture discrete . . . . .	9
1.3.3	Approccio al continuo con fratture distribuite . . . . .	11
1.4	Arricchimento della cinematica . . . . .	13
1.4.1	Approccio alle discontinuità forti . . . . .	14
1.5	Obiettivi della tesi . . . . .	17
<b>2</b>	<b>PROBLEMA DEL SOLIDO ATTRAVERSATO DA DISCONTINUITÀ FORTI</b>	<b>19</b>
2.1	Notazione . . . . .	19
2.2	Cinematica . . . . .	23
2.3	Modello costitutivo . . . . .	23
2.3.1	Comportamento reversibile del continuo . . . . .	26
2.3.2	Comportamento irreversibile del continuo . . . . .	28
2.3.3	Comportamento reversibile dell'interfaccia . . . . .	34
2.3.4	Comportamento irreversibile dell'interfaccia . . . . .	36
2.4	Formulazione variazionale . . . . .	39
2.4.1	Funzionale di Hellinger-Reissner . . . . .	43
2.4.2	Regolarizzazione . . . . .	44
2.5	Bilancio energetico . . . . .	47
2.6	Un semplice esempio . . . . .	48
<b>3</b>	<b>IMPLEMENTAZIONE NEL METODO DEGLI ELEMENTI FINITI</b>	<b>55</b>
3.1	Formulazione incrementale . . . . .	55
3.2	Cinematica . . . . .	57

3.3	Funzioni di forma . . . . .	58
3.3.1	Salto costante . . . . .	61
3.3.2	Salto lineare . . . . .	64
3.4	Formulazione variazionale FEM . . . . .	68
3.5	Strategia di soluzione . . . . .	73
3.5.1	Equazioni costitutive . . . . .	73
3.5.2	Equazioni di equilibrio . . . . .	79
3.5.3	Ipotesi di discontinuità immerse . . . . .	82
3.5.4	Integrazione delle matrici di rigidezza . . . . .	83
3.6	Algoritmo di soluzione . . . . .	91
3.7	Bilancio energetico . . . . .	97
<b>4</b>	<b>APPLICAZIONI NUMERICHE</b>	<b>99</b>
4.1	Lastra quadrata tesa . . . . .	103
4.1.1	Distribuzione di spostamenti costante . . . . .	103
4.1.2	Distribuzione di spostamenti lineare . . . . .	111
4.2	Lastra rettangolare tesa . . . . .	122
4.2.1	Distribuzione di spostamenti costante . . . . .	123
4.2.2	Distribuzione di spostamenti trapezoidale . . . . .	127
4.2.3	Distribuzione di spostamenti triangolare . . . . .	131
4.3	Lastra con foro circolare . . . . .	135
4.4	Lastra con asola . . . . .	143
4.5	Lastra con intaglio circolare . . . . .	151
4.6	Lastra con intaglio ad asola . . . . .	158
4.7	Trave con intaglio . . . . .	165
4.8	Prova di trazione e taglio . . . . .	174



# Elenco delle figure

1.1	Rottura fragile di navi liberty. (a) la nave commerciale SS Schenectady, (b) particolare. . . . .	1
1.2	Diga del Gleno: (a) prima del collasso e (b) dopo il collasso. . . . .	2
1.3	Modellazione FEM: (a) di un femore. (b) di un tratto di arteria. . . . .	3
1.4	Scale dimensionali [65] . . . . .	3
1.5	Comportamento di solidi con zone di localizzazione . . . . .	4
1.6	(a) Frattura in calcestruzzo. (b) Bande di taglio in provino di acciaio. . . . .	5
1.7	Superfici di scorrimento nei terreni: (a) muro di sostegno, (b) pendio naturale e (c) fondazione superficiale. . . . .	6
1.8	Concentrazione delle tensioni sul bordo di fori e difetti. . . . .	8
1.9	Modi fondamentali di frattura . . . . .	9
1.10	Modello di frattura coesiva . . . . .	10
1.11	Confronto tra approccio discreto [24] ed approccio al continuo [3]. . . . .	12
1.12	Campi di spostamento e di deformazione. Confronti tra i modelli: (a) di frattura diffusa, (b) con discontinuità deboli e (c) con discontinuità forti . . . . .	14
1.13	Arricchimento. Confronti tra i modelli: (a) nodale (X-FEM), (b) elementare (EED), (c) elementare con salto lineare e gdl locali e (d) elementare con salto lineare e gdl globali. . . . .	16
2.1	Solido attraversato da un'interfaccia: (a) e (b) interna, (c) e (d) con un estremo sulla frontiera. . . . .	24
2.2	Campo degli spostamenti all'interno della regione $\Omega_\varphi$ . . . . .	25
2.3	Potenziale elastico e potenziale complementare legati attraverso la Trasformata di Legendre. . . . .	27

2.4	Esempio di coni delle normali all'insieme convesso $K$ . . .	31
2.5	(a) Lastra tesa, (b) legge trazione separazione, (c) spostamento longitudinale, (d) tensione normale $\sigma_y$ , (e) salto e (f) spostamento trasversale. . . . .	51
2.6	Configurazione indeformata (tratteggio arancio) a confronto con configurazioni deformate: (a) all'innesco (tratteggio magenta), (b) durante l'apertura e (c) alla completa apertura dell'interfaccia. . . . .	53
2.7	Bilancio energetico . . . . .	54
3.1	Discretizzazione della geometrica: elementi integri ed attraversati dall'interfaccia. . . . .	57
3.2	Funzioni di forma singolari per interpolazione del salto: (a) costante; (b) e (c) lineare. . . . .	59
3.3	Derivate delle funzioni di forma singolari per interpolazione del salto: (a) e (b) costante; (c) e (d) lineare. . . . .	60
3.4	Funzioni di forma singolari per interpolazione del salto: (a) e (b) costante; (c) e (d) lineare. . . . .	62
3.5	Moto rigido: (a) salto costante e (b) salto lineare. . . . .	63
3.6	Funzioni di forma singolari (a) caso 1, (b) caso 2, (c) caso 3, (d) caso 4, (e) caso 5 e (f) caso 6. . . . .	65
3.7	Funzioni di forma singolari. . . . .	67
3.8	Elementi con discontinuità immerse: elemento bilineare a quattro con salto costante ( $4L/\text{cost}$ ) e elemento biquadratico a otto nodi con salto lineare ( $8Q/\text{lin}$ ) . . . . .	67
3.9	Punti di Gauss dei sottodomini $\Omega_{\varphi_i}^+$ e $\Omega_{\varphi_i}^-$ (a) e dell'interfaccia $S$ per interpolazione del salto: (b) costante; (c) lineare. . . . .	75
3.10	Elemento finito integro: trasformazione tra elemento master in coordinate intrinseche e elemento in coordinate geometriche. . . . .	83
3.11	Ordine di integrazione e ubicazione dei punti di Gauss per elementi lineari e quadratici. . . . .	85
3.12	Elemento finito attraversato: trasformazione tra elemento master ed elemento in coordinate geometriche. (a) sottodomini quadrangolari e (b) sottodomini triangolari. . . . .	87
3.13	Discretizzazione della geometrica: elementi integri ed attraversati dall'interfaccia. . . . .	89
3.14	Intefaccia: trasformazione tra elemento master ed elemento in coordinate geometriche. . . . .	89

3.15	Ordine di integrazione e ubicazione dei punti di Gauss dell'interfaccia. . . . .	90
3.16	Non convergenza dell'algoritmo di soluzione a controllo di carico. . . . .	91
3.17	Diagramma di flusso dell'algoritmo di soluzione. . . . .	93
4.1	(a) Fase di generazione dei dati di input con il programma ADINA; (b) finestra di dialogo del codice FracSDA8. . . . .	100
4.2	Legami costitutivi disponibili per l'interfaccia in FracSDA8: (a) lineare e (b) bilineare. . . . .	102
4.3	Tipologie di elementi disponibili nel codice FracSDA8. . . . .	102
4.4	Lastra quadrata tesa con distribuzione di spostamento costante. . . . .	103
4.5	Lastra quadrata tesa. Elemento 4L/cost. Mesh 1elem. Distribuzione di spostamento costante. Interfaccia con softening lineare: (a) curva carico spostamento, (b) spostamento trasversale. . . . .	105
4.6	Lastra quadrata tesa. Elemento 4L/cost. Mesh 1elem. Distribuzione di spostamento costante. Interfaccia con softening lineare. Bilancio energetico: (a) in termini totali, (b) in termini incrementali. . . . .	106
4.7	Lastra quadrata tesa. Elemento 4L/cost. Mesh 1elem. Distribuzione di spostamento costante. Interfaccia con softening lineare. Spostamento direzione Y. Istanti: (a) 12 ( $\delta=0.009$ mm), (b) 32 ( $\delta=0.025$ mm) e (c) 94 ( $\delta=0.050$ mm). . . . .	107
4.8	Lastra quadrata tesa. Elemento 4L/cost. Mesh 1elem. Distribuzione di spostamento costante. Interfaccia con softening bilineare: (a) curva carico spostamento, (b) spostamento trasversale. . . . .	109
4.9	Lastra quadrata tesa. Elemento 4L/cost. Mesh 1elem. Distribuzione di spostamento costante. Interfaccia con softening bilineare. Bilancio energetico: (a) in termini totali, (b) in termini incrementali. . . . .	110
4.10	Lastra quadrata tesa con distribuzione di spostamento lineare. . . . .	111
4.11	Lastra quadrata tesa. Elemento 4L/cost. Mesh 1elem. Distribuzione di spostamento lineare. Bilancio energetico: (a) in termini totali, (b) in termini incrementali. . . . .	112

4.12	Lastra quadrata tesa. Elemento 4L/cost. Mesh 1elem. Distribuzione di spostamento lineare. Spostamento direzione Y. Istanti: (a) 12 ( $\delta=0.009$ mm), (b) 32 ( $\delta=0.025$ mm) e (c) 94 ( $\delta=0.050$ mm). . . . .	113
4.13	Lastra quadrata tesa. Elemento 8Q/lin. Mesh 1elem. Distribuzione di spostamento lineare. Bilancio energetico: (a) in termini totali, (b) in termini incrementali. . . . .	115
4.14	Lastra quadrata tesa. Elemento 8Q/lin. Mesh 1elem. Distribuzione di spostamento lineare. Spostamento direzione Y. Istanti: (a) 12 ( $\delta=0.009$ mm), (b) 32 ( $\delta=0.025$ mm) e (c) 94 ( $\delta=0.050$ mm). . . . .	116
4.15	Discretizzazioni adottate per la lastra quadrata tesa: (a) 1elem, (b) 2elem, (c) 5elem e (d) 10elem. . . . .	117
4.16	Lastra quadrata tesa. Elemento 4L/cost. Mesh 10elemL. Distribuzione di spostamento lineare. Bilancio energetico: (a) in termini totali, (b) in termini incrementali. . . . .	118
4.17	Lastra quadrata tesa. Distribuzione di spostamento lineare. Confronti tra i risultati ottenuti con le discretizzazioni di Figura 4.15 e gli elementi 4L/cost e 8Q/lin: (a) curva carico spostamento, (b) spostamento trasversale. . . . .	119
4.18	Lastra quadrata tesa. Distribuzione di spostamento lineare. Confronti tra i risultati ottenuti con le discretizzazioni di Figura 4.15 e gli elementi 4L/cost e 8Q/lin. Curva carico spostamento: (a) ingrandimento in corrispondenza del picco, (b) ingrandimento in corrispondenza dello spostamento ultimo. . . . .	120
4.19	Lastra quadrata tesa. Distribuzione di spostamento lineare. Confronti tra i risultati ottenuti con le discretizzazioni di Figura 4.15 e gli elementi 4L/cost e 8Q/lin: energia di deformazione. . . . .	121
4.20	Lastra rettangolare tesa: (a) distribuzione costante, (b) distribuzione trapezoidale, (c) distribuzione triangolare e (d) discretizzazione adottata. . . . .	122
4.21	Lastra rettangolare tesa. Elemento 4L/cost. Analisi 4nodiL. Distribuzione di spostamento costante. Curva carico spostamento. . . . .	124
4.22	Lastra rettangolare tesa. Elemento 4L/cost. Analisi 4nodiL. Distribuzione di spostamento costante. Bilancio energetico: (a) in termini totali (b) in termini incrementali. . . . .	125

4.23	Lastra rettangolare tesa. Elemento 4L/cost. Analisi 4no- diL. Distribuzione di spostamento costante. Configura- zione deformata. Istanti: (a) 12 ( $\delta=0.012$ mm), (b) 162 ( $\delta=0.162$ mm), (c) 202 ( $\delta=0.202$ mm), (d) 252 ( $\delta=0.252$ mm) e (e) 352 ( $\delta=0.352$ mm). . . . .	126
4.24	Lastra rettangolare tesa. Elemento 4L/cost. Analisi 4no- diL. Distribuzione di spostamento costante. Spostamen- to direzione Z. Istanti: (a) 12 ( $\delta=0.012$ mm), (b) 162 ( $\delta=0.162$ mm), (c) 202 ( $\delta=0.202$ mm), (d) 252 ( $\delta=0.252$ mm) e (e) 352 ( $\delta=0.352$ mm). . . . .	126
4.25	Lastra rettangolare tesa. Distribuzione di spostamento trapezoidale. Confronto tra elementi 4L/cost e 8Q/lin: curva carico spostamento. . . . .	128
4.26	Lastra rettangolare tesa. Elemento 8Q/lin. Analisi 8no- diQ. Distribuzione di spostamento trapezoidale. Spo- stamento direzione Z. Istanti: (a) 162 ( $\delta=0.162$ mm) , (b) 172 ( $\delta=0.172$ mm), (c) 182 ( $\delta=0.182$ mm), (d) 192 ( $\delta=0.192$ mm), e (e) 272 ( $\delta=0.272$ mm). . . . .	128
4.27	Lastra rettangolare tesa. Distribuzione di spostamento trapezoidale. Confronto tra elementi 4L/cost e 8Q/lin. Bilancio energetico: (a) in termini totali (b) in termini incrementali. . . . .	129
4.28	Lastra rettangolare tesa. Elemento 8Q/lin. Analisi 8no- diQ. Distribuzione di spostamento trapezoidale. Confi- gurazione deformata. Istanti: (a) 162 ( $\delta=0.162$ mm) , (b) 172 ( $\delta=0.172$ mm), (c) 182 ( $\delta=0.182$ mm), (d) 192 ( $\delta=0.192$ mm), e (e) 272 ( $\delta=0.272$ mm). . . . .	130
4.29	Lastra rettangolare tesa. Distribuzione di spostamen- to trapezoidale. Particolare della configurazione defor- mata. Confronto tra (a) elementi 4L/cost, istante 152 ( $\delta=0.152$ mm), e (b) elementi 8Q/lin, istante 162 ( $\delta=0.162$ mm). . . . .	130
4.30	Lastra rettangolare tesa. Distribuzione di spostamento triangolare. Confronto tra elementi 4L/cost e 8Q/lin: curva carico spostamento. . . . .	132
4.31	Lastra rettangolare tesa. Elemento 8Q/lin. Analisi 8no- diQ. Distribuzione di spostamento triangolare. Sposta- mento direzione Z. Istanti: (a) 182 ( $\delta=0.182$ mm) , (b) 252 ( $\delta=0.252$ mm), (c) 322 ( $\delta=0.322$ mm), (d) 552 ( $\delta=0.552$ mm), e (e) 1004 ( $\delta=1.004$ mm). . . . .	132

4.32	Lastra rettangolare tesa. Distribuzione di spostamento triangolare. Confronto tra elementi 4L/cost e 8Q/lin. Bilancio energetico: (a) in termini totali (b) in termini incrementali. . . . .	133
4.33	Lastra rettangolare tesa. Elemento 8Q/lin. Analisi 8no-di-Q. Distribuzione di spostamento triangolare. Configurazione deformata. Istanti: (a) 182 ( $\delta=0.182$ mm), (b) 252 ( $\delta=0.252$ mm), (c) 322 ( $\delta=0.322$ mm), (d) 552 ( $\delta=0.552$ mm), e (e) 1004 ( $\delta=1.004$ mm). . . . .	134
4.34	Lastra rettangolare tesa. Distribuzione di spostamento triangolare. Particolare della configurazione deformata. Confronto tra (a) elementi 4L/cost, istante 642 ( $\delta=0.642$ mm), e (b) elementi 8Q/lin, istante 562 ( $\delta=0.562$ mm). . .	134
4.35	Lastra con foro circolare e modello di calcolo. Dimensioni in millimetri. . . . .	135
4.36	Lastra con foro circolare. Discretizzazioni adottate: (a) mesh A, (b) mesh B e (c) mesh C. . . . .	137
4.37	Lastra con foro circolare. Elemento 4L/cost. Confronti tra le discretizzazioni mesh A, mesh B e mesh C: (a) curva carico spostamento (b) spostamento trasversale. . .	138
4.38	Lastra con foro circolare. Elemento 8Q/lin. Confronti tra le discretizzazioni mesh A, mesh B e mesh C: (a) curva carico spostamento (b) spostamento trasversale. . .	139
4.39	Lastra con foro circolare. Mesh C. Confronto tra elementi 4L/cost e 8Q/lin: (a) curva carico spostamento (b) spostamento trasversale. . . . .	140
4.40	Lastra con foro circolare. Mesh C. Confronto tra elementi 4L/cost e 8Q/lin. Bilancio energetico: (a) in termini totali (b) in termini incrementali. . . . .	141
4.41	Lastra con foro circolare. Elemento 4L/cost. Configurazione deformata. Discretizzazioni: (a) mesh A, (b) mesh B e (c) mesh C. . . . .	142
4.42	Lastra con foro circolare. Elemento 8Q/lin. Configurazione deformata. Discretizzazioni: (a) mesh A, (b) mesh B e (c) mesh C. . . . .	142
4.43	Lastra con asola e modello di calcolo. Dimensioni in millimetri. . . . .	143
4.44	Lastra con asola. Discretizzazioni adottate: (a) mesh A, (b) mesh B e (c) mesh C. . . . .	145

4.45	Lastra con asola. Elemento 4L/cost. Confronti tra le discretizzazioni mesh A, mesh B e mesh C: (a) curva carico spostamento (b) spostamento trasversale. . . . .	146
4.46	Lastra con asola. Elemento 8Q/lin. Confronti tra le discretizzazioni mesh A, mesh B e mesh C: (a) curva carico spostamento (b) spostamento trasversale. . . . .	147
4.47	Lastra con asola. Confronto tra elementi 4L/cost (mesh C) e 8Q/lin (mesh B): (a) curva carico spostamento (b) spostamento trasversale. . . . .	148
4.48	Lastra con asola. Confronto tra elementi 4L/cost (mesh C) e 8Q/lin (mesh B). Bilancio energetico: (a) in termini totali (b) in termini incrementali. . . . .	149
4.49	Lastra con asola. Elemento 4L/cost. Configurazione deformata. Discretizzazione: (a) mesh A, (b) mesh B e (c) mesh C. . . . .	150
4.50	Lastra con asola. Elemento 8Q/lin. Configurazione deformata. Discretizzazione: (a) mesh A e (b) mesh B. . . . .	150
4.51	Lastra con intaglio circolare. Dimensioni in millimetri. . . . .	151
4.52	Lastra con intaglio circolare. Elemento 4L/cost. Confronti tra le discretizzazioni mesh A, mesh B e mesh C: (a) curva carico spostamento (b) spostamento trasversale. . . . .	153
4.53	Lastra con intaglio circolare. Elemento 8Q/lin. Confronti tra le discretizzazioni mesh A, mesh B e mesh C: (a) curva carico spostamento (b) spostamento trasversale. . . . .	154
4.54	Lastra con intaglio circolare. Mesh C. Confronto tra elementi 4L/cost e 8Q/lin: (a) curva carico spostamento (b) spostamento trasversale. . . . .	155
4.55	Lastra con intaglio circolare. Mesh C. Confronto tra elementi 4L/cost e 8Q/lin. Bilancio energetico: (a) in termini totali (b) in termini incrementali. . . . .	156
4.56	Lastra con intaglio circolare. Elemento 4L/cost. Configurazione deformata. Discretizzazione: (a) mesh A, (b) mesh B e (c) mesh C. . . . .	157
4.57	Lastra con intaglio circolare. Elemento 8Q/lin. Configurazione deformata. Discretizzazione: (a) mesh A, (b) mesh B e (c) mesh C. . . . .	157
4.58	Lastra con intaglio ad asola. Dimensioni in millimetri. . . . .	158
4.59	Lastra con intaglio ad asola. Elemento 4L/cost. Confronti tra le discretizzazioni mesh A, mesh B e mesh C: (a) curva carico spostamento (b) spostamento trasversale. . . . .	160

4.60	Lastra con intaglio ad asola. Elemento 8Q/lin. Confronti tra le discretizzazioni mesh A, mesh B e mesh C: (a) curva carico spostamento (b) spostamento trasversale. . .	161
4.61	Lastra con intaglio ad asola. Mesh C. Confronto tra elementi 4L/cost e 8Q/lin: (a) curva carico spostamento (b) spostamento trasversale. . . . .	162
4.62	Lastra con intaglio ad asola. Mesh C. Confronto tra elementi 4L/cost e 8Q/lin. Bilancio energetico: (a) in termini totali (b) in termini incrementali. . . . .	163
4.63	Lastra con intaglio ad asola. Elemento 4L/cost. Configurazione deformata. Discretizzazione: (a) mesh A, (b) mesh B e (c) mesh C. . . . .	164
4.64	Lastra con intaglio ad asola. Elemento 8Q/lin. Configurazione deformata. Discretizzazione: (a) mesh A, (b) mesh B e (c) mesh C. . . . .	164
4.65	Schema della prova a flessione su tre punti. . . . .	165
4.66	Mesh utilizzate per discretizzare la prova di flessione su tre punti: (a) L5elem, (b) Q5elem e (c) L14elem. . . . .	168
4.67	Prova di flessione su tre punti. Confronto tra le analisi numeriche L5elem, L14elem, Q5elem e i risultati sperimentali. Curva carico spostamento. . . . .	168
4.68	Prova di flessione su tre punti. Confronto tra le analisi numeriche L14elem e Q5elem. Bilancio energetico: (a) in termini totali (b) in termini incrementali. . . . .	169
4.69	Prova di flessione su tre punti. Elementi 4L/cost. Mesh L14elem. Configurazione deformata. Istanti: (a) 5 ( $\delta=0.06$ mm), (b) 39 ( $\delta=0.17$ mm), (c) 92 ( $\delta=0.31$ mm), (d) 254 ( $\delta=0.47$ mm) e (e) 463 ( $\delta=0.7$ mm). . . . .	170
4.70	Prova di flessione su tre punti. Elementi 4L/cost. Mesh L14elem. Particolare della configurazione deformata. Istanti: (a) 5 ( $\delta=0.06$ mm), (b) 39 ( $\delta=0.17$ mm), (c) 92 ( $\delta=0.31$ mm), (d) 254 ( $\delta=0.47$ mm) e (e) 463 ( $\delta=0.7$ mm). . . . .	171
4.71	Prova di flessione su tre punti. Elementi 4L/cost. Mesh L5elem. Configurazione deformata. Istanti: (a) 32 ( $\delta=0.22$ mm), (b) 122 ( $\delta=0.35$ mm), (c) 252 ( $\delta=0.49$ mm) e (d) 443 ( $\delta=0.7$ mm). . . . .	172
4.72	Prova di flessione su tre punti. Elementi 8Q/lin. Mesh Q5elem. Configurazione deformata. Istanti: (a) 32 ( $\delta=0.22$ mm), (b) 82 ( $\delta=0.3$ mm), (c) 132 ( $\delta=0.35$ mm) e (d) 192 ( $\delta=0.42$ mm). . . . .	173



4.73	(a) Schema della prova di trazione e taglio su un provino con doppio intaglio. (b) Mesh adottata per la simulazione numerica. . . . .	174
4.74	Prova di trazione e taglio. Confronto tra l'analisi numerica e i risultati sperimentali: curva carico spostamento. .	176
4.75	Prova di trazione e taglio. Analisi numerica: bilancio energetico in termini totali. . . . .	176
4.76	Prova di trazione e taglio. Analisi numerica. Configurazione deformata. Istanti: (a) 32 ( $\delta=0.0070$ mm), (b) 82 ( $\delta=0.0106$ mm), (c) 112 ( $\delta=0.0127$ mm), (d) 132 ( $\delta=0.0141$ mm), (e) 202 ( $\delta=0.0190$ mm) e (f) 322 ( $\delta=0.0274$ mm). . .	177
4.77	Prova di trazione e taglio. Posizione delle interfacce: (a) rilievi sperimentali [42, 54], (b) stima numerica ( $\delta=0.0274$ mm) e (c) confronti. . . . .	178



# Elenco delle tabelle

4.1	Lastra quadrata tesa: distribuzione costante e softening lineare. . . . .	104
4.2	Lastra quadrata tesa: distribuzione costante e softening bilineare. . . . .	108
4.3	Lastra quadrata tesa: distribuzione lineare. . . . .	117
4.4	Lastra rettangolare tesa: distribuzione costante. . . . .	123
4.5	Lastra rettangolare tesa: distribuzione trapezoidale. . . . .	127
4.6	Lastra rettangolare tesa: distribuzione triangolare. . . . .	131
4.7	Lastra con foro circolare. . . . .	136
4.8	Lastra con asola. . . . .	144
4.9	Lastra con intaglio circolare. . . . .	151
4.10	Lastra con intaglio ad asola. . . . .	158
4.11	Prova di flessione su tre punti. . . . .	166
4.12	Prova di trazione e taglio. . . . .	175



# Elenco dei simboli

$b_\alpha$	componenti della forza di volume ( $\alpha=x,y,z$ )
$\mathbf{b}$	forza di volume
$\hat{\mathbf{B}}$	matrice delle derivate delle funzioni di forma regolari
$\tilde{\mathbf{B}}$	matrice delle derivate delle funzioni di forma singolari
$c_{ij}$	coefficienti elastici
$\mathbf{C}$	operatore di congruenza
$\mathbf{C}'$	operatore di equilibrio
$d$	funzione di dissipazione del continuo
$d'$	funzione di dissipazione coniugata del continuo
$d_S$	funzione di dissipazione dell'interfaccia
$d'_S$	funzione di dissipazione coniugata dell'interfaccia
$d_{St}$	funzione di dissipazione tangente dell'interfaccia
$d'_{St}$	funzione di dissipazione coniugata tangente dell'interfaccia
$d_t$	funzione di dissipazione tangente del continuo
$d'_t$	funzione di dissipazione tangente coniugata del continuo
$\hat{\mathbf{d}}$	vettore degli spostamenti nodali regolari
$\tilde{\mathbf{d}}$	vettore degli spostamenti nodali singolari
$\mathcal{D}$	energia dissipata
$\mathcal{E}$	energia di deformazione elastica
$E$	modulo di elasticità normale o di Young
$\mathbf{E}$	matrice elastica del continuo
$\mathbf{E}_{alg}$	matrice algoritmica del continuo
$\mathbf{E}_{alg,S}$	matrice algoritmica dell'interfaccia
$\mathbf{E}_{ep}$	matrice elastoplastica del continuo
$\mathbf{E}_S$	matrice elastica dell'interfaccia
$\mathbf{E}_{S,ep}$	matrice elastoplastica dell'interfaccia
$f_0$	resistenza a trazione
$F$	energia libera di Helmholtz specifica
$\mathbf{F}_\alpha$	vettore delle forze nodali ( $\alpha = \hat{d}, \tilde{d}$ )

$g$	funzione di snervamento
$G_f$	energia di frattura
$g_S$	funzione di attivazione dell'interfaccia
$\mathbb{H}$	funzione di Heaveside
$\mathcal{H}$	funzione di incrudimento del continuo
$\mathbf{H}$	matrice di incrudimento del continuo
$H_S$	modulo di incrudimento dell'interfaccia
$\mathcal{H}_S$	funzione di incrudimento dell'interfaccia
$\mathbf{H}_S$	matrice di incrudimento dell'interfaccia
$J$	determinante della matrice Jacobiana
$\mathbf{J}$	matrice Jacobiana
$K$	insieme degli stati tensionali ammissibili del continuo
$K_S$	insieme degli stati tensionali ammissibili dell'interfaccia
$\mathbf{K}_{\alpha,\beta}$	matrice di rigidezza del continuo ( $\alpha, \beta = \hat{d}, \tilde{d}$ )
$\mathbf{K}_S$	matrice di rigidezza dell'interfaccia
$l_S$	lunghezza dell'interfaccia
$\mathcal{L}_e$	lavoro compiuto dalle forze esterne
$\hat{\mathbf{L}}$	matrice di connettività nodale regolare
$\tilde{\mathbf{L}}$	matrice di connettività nodale singolare
$n_{el}$	numero totale di elementi finiti
$n_\alpha$	componenti della normale ( $\alpha=x,y,z$ )
$n_\varphi$	numero di elementi finiti attraversati dall'interfaccia
$\mathbf{n}$	versore normale al contorno o all'interfaccia
$\mathcal{N}$	operatore di equilibrio al contorno
$N_K^{(\sigma,\chi)}$	cono delle normali all'insieme $K$
$N_{K_S}^{(t_S,\chi_S)}$	cono delle normali all'insieme $K_S$
$N_{T_K}^{(\sigma,\chi)}$	cono delle normali all'insieme $T_K^{(\sigma,\chi)}$
$N_{T_{K_S}}^{(t_S,\chi_S)}$	cono delle normali all'insieme $N_{K_S}^{(t_S,\chi_S)}$
$N_\alpha$	funzione di forma regolare del continuo
$\tilde{N}_\alpha$	funzione di forma singolare del continuo
$\hat{\mathbf{N}}$	matrice delle funzioni di forma regolari del continuo
$\tilde{\mathbf{N}}$	matrice delle funzioni di forma singolari del continuo
$[[\tilde{\mathbf{N}}]]_i$	matrice delle funzioni di forma dell'interfaccia
$\mathbf{m}$	versore tangente all'interfaccia
$q_\alpha$	componenti della forza di superficie ( $\alpha=x,y,z$ )
$\mathbf{q}$	forza di superficie applicata sulla frontiera caricata
$\mathbf{r}$	forza di superficie applicata sulla frontiera vincolata
$R, \mathbf{R}$	residuo

$S$	interfaccia
$S_\alpha$	estremi dell'interfaccia ( $\alpha = 1, 2$ )
$t$	istante di tempo
$\mathbf{t}_S$	vettore delle trazioni all'interfaccia
$T_K^{(\sigma, \chi)}$	cono delle tangenti all'insieme $K$
$T_{K_S}^{(t_S, \chi_S)}$	cono delle tangenti all'insieme $K_S$
$u_\alpha$	componenti di spostamento ( $\alpha=x,y,z$ )
$\mathbf{u}$	vettore degli spostamenti totali
$\hat{\mathbf{u}}$	vettore degli spostamenti regolari
$\tilde{\mathbf{u}}$	vettore degli spostamenti singolari
$\bar{\mathbf{u}}$	spostamenti assegnati sulla frontiera vincolata
$\llbracket \mathbf{u} \rrbracket_S$	salto di spostamento in corrispondenza dell'interfaccia $S$
$\alpha$	vettore di variabili cinematiche interne del continuo
$\alpha_S$	vettore di variabili cinematiche interne dell'interfaccia
$\gamma_{\alpha\beta}$	scorrimento angolare nel piano ( $\alpha, \beta$ ) ( $\alpha, \beta=x,y,z$ )
$\partial\Omega$	frontiera del dominio $\Omega$
$\varepsilon_\alpha$	deformazioni secondo gli assi coordinati ( $\alpha=x,y,z$ )
$\varepsilon$	vettore delle componenti di deformazione
$\lambda$	moltiplicatore plastico del continuo
$\lambda_S$	moltiplicatore plastico dell'interfaccia
$\nu$	coefficiente di contrazione trasversale o di Poisson
$\pi$	potenziale di incrudimento del continuo
$\pi_S$	potenziale di incrudimento dell'interfaccia
$\Pi_t^{HW}$	funzionale di Hu-Washizu tangente
$\Pi_t^{HR}$	funzionale di Hellinger-Reissner tangente
$\sigma_\alpha$	tensioni normali ai piani coordinati ( $\alpha=x,y,z$ )
$\sigma$	vettore delle componenti di tensione
$\tau_{\alpha\beta}$	tensione tangenziale ( $\alpha, \beta=x,y,z$ )
$\chi$	vettore di variabili statiche interne del continuo
$\chi_S$	vettore di variabili statiche interne dell'interfaccia
$\varphi$	potenziale elastico del continuo
$\varphi'$	potenziale elastico complementare del continuo
$\varphi_S$	potenziale elastico dell'interfaccia
$\varphi'_S$	potenziale elastico complementare dell'interfaccia
$\varphi_{St}$	potenziale elastico tangente dell'interfaccia
$\varphi'_{St}$	potenziale elastico complementare tangente dell'interfaccia
$\varphi_t$	potenziale elastico tangente del continuo
$\varphi'_t$	potenziale elastico complementare tangente del continuo
$\Phi$	potenziale elastoplastico del continuo

$\Phi_S$	potenziale elastoplastico dell'interfaccia
$\Omega$	dominio
$\Omega_\varphi$	dominio attraversato dall'interfaccia
$\dot{(\circ)}$	velocità di $(\circ)$
$\Delta(\circ)$	incremento di $(\circ)$
$(\circ)_i$	grandezza $(\circ)$ relativa all' $i$ -esimo elemento finito



# Introduzione

Nella realizzazione di componenti e di elementi strutturali è diffuso l'impiego di materiali nei quali, raggiunti particolari stati di sollecitazione, si attivano processi di frattura.

Esperienze di laboratorio condotte all'inizio del XX secolo hanno mostrato che diversi materiali esibiscono concentrazione di deformazioni inelastiche in bande ristrette, chiamate zone di localizzazione.

Il fenomeno della localizzazione è causato dalla presenza di vuoti, microfratture ed imperfezioni a livello microscopico; a livello macroscopico vengono osservate fratture nelle rocce o nel calcestruzzo, bande di taglio nei metalli e superfici di scorrimento nei terreni.

L'analisi dei fenomeni di frattura può essere effettuata a diverse scale dimensionali, che vanno da quella atomistica alla macroscale, tipica degli approcci ingegneristici.

I due contesti teorici maggiormente accreditati per modellare i meccanismi di frattura sono la Meccanica della Frattura e la Meccanica del Continuo.

I legami costitutivi utilizzati in questi contesti sono caratterizzati da incrudimento negativo (*softening*), al fine di riprodurre il decremento di sforzo al crescere delle deformazioni del materiale.

Nell'ambito della Meccanica del Continuo si distinguono due approcci: un approccio con fratture discrete, basato sul modello di frattura coesiva, ed un approccio al continuo con fratture distribuite (*smearred crack approach*).

Quest'ultimo, sebbene vantaggioso dal punto di vista dell'implementazione numerica, presenta problematiche legate alla non oggettività della risposta al variare della discretizzazione adottata (*mesh-dependency*) a causa del comportamento *softening* del materiale.

Al fine di superare tali limiti sono stati proposti diversi approcci rintracciabili in letteratura, quali i modelli con continuo arricchito, i modelli con discontinuità deboli, caratterizzati da salti nel campo delle

deformazioni, e i modelli con discontinuità forti, con discontinuità nel campo degli spostamenti.

In letteratura possono essere reperiti molti contributi basati sull'approccio con discontinuità forti, nei quali vengono proposte diverse strategie di implementazione nel metodo agli elementi finiti. Tali strategie possono essere classificate in base al modo in cui viene inclusa un'interfaccia nell'elemento finito.

Le interfacce sono dette interelemento se lo sviluppo di interfacce avviene in corrispondenza di specifici elementi finiti di spessore nullo (zero-thickness element), posti tra elementi finiti standard.

Se la nascita e lo sviluppo di interfacce avviene all'interno degli elementi finiti definiti dalla discretizzazione del dominio adottata si parla di interfacce intraelemento.

La tesi è sviluppata nel contesto dell'approccio delle discontinuità forti intraelemento.

L'obiettivo della tesi è lo sviluppo di una strategia di soluzione che permette di risolvere il problema del solido elastoplastico attraversato da discontinuità forti nell'ambito del metodo agli elementi finiti. In particolare si indaga sulla possibilità di utilizzare elementi finiti con discontinuità immerse che utilizzano approssimazioni lineari per il salto nel campo di spostamento.

Nel primo capitolo sono descritti gli approcci classici ed i modelli sviluppati recentemente per lo studio dei fenomeni di frattura.

Nel secondo capitolo è riportata la formulazione del problema del solido elastoplastico attraversato da discontinuità forti, ottenuta per via variazionale.

Nel terzo capitolo è proposta una strategia di soluzione numerica del problema, modellato nell'ambito del metodo agli elementi finiti, valida sia per approssimazioni costanti che per approssimazioni lineari del salto nel campo degli spostamenti.

Nel quarto capitolo vengono infine presentate alcune analisi numeriche condotte con il codice di calcolo agli elementi finiti *FracSDA8*, realizzato ad hoc in ambiente *MatLab*, al fine di provare il corretto funzionamento del programma e di validare l'algoritmo di soluzione proposto nel capitolo tre.

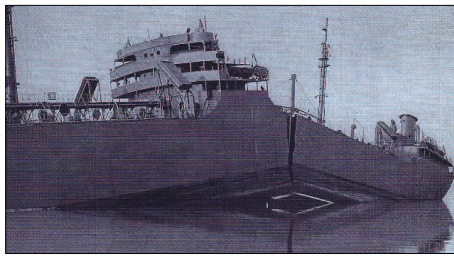
Alcune conclusioni chiudono la tesi.

# Capitolo 1

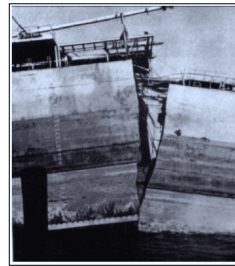
## STATO DELL'ARTE

L'interesse verso i processi di frattura e di collasso delle strutture è stato stimolato fin dall'inizio del '900 da fatti dai risvolti sociali a volte drammatici. Si pensi alle navi liberty costruite nei primi decenni del secolo scorso (Figure 1.1(a) e 1.1(b)), o alle navi da guerra impiegate nei due conflitti mondiali, colate a picco a causa di meccanismi di frattura rilevati sull'acciaio costituente le diverse parti strutturali.

*Navi*



(a)



(b)

Figura 1.1: Rottura fragile di navi liberty. (a) la nave commerciale SS Schenectady, (b) particolare.

Un altro esempio è costituito dalle dighe in calcestruzzo, spesso interessate dallo sviluppo di fessure che potrebbero pregiudicare la funzionalità dell'opera, con conseguenti problemi di siccità, o provocarne

*Dighe in calcestruzzo*

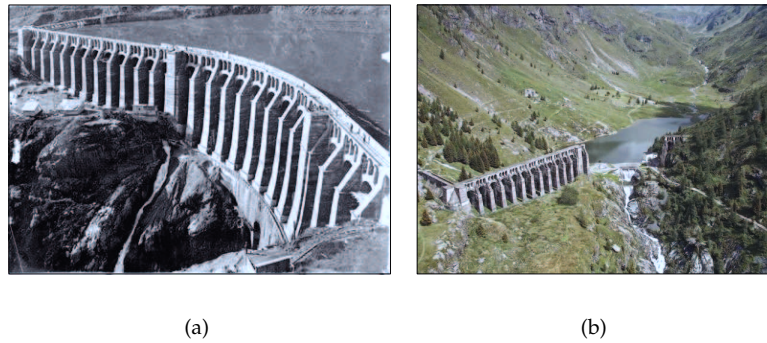


Figura 1.2: Diga del Gleno: (a) prima del collasso e (b) dopo il collasso.

il collasso, come nel caso della diga del Gleno in Lombardia (Figure 1.2(a) e 1.2(b)).

Ulteriori stimoli arrivano dall'industria e dall'edilizia per lo sviluppo di nuovi materiali, componenti ed elementi strutturali, al fine di accrescere resistenza e durabilità.

*Ingegneria  
biomedica*

Altri quesiti sono posti dall'ingegneria biomedica. Un problema tipicamente studiato è l'osteoporosi, fenomeno che consiste nella progressiva perdita di massa ossea con conseguente rischio di frattura dell'osso. In Figura 1.3(a) è riportato una modellazione numerica della testa di un femore. Al fine di evitare tale eventualità è necessario valutare con adeguata accuratezza la resistenza dell'osso e la sua propensione a fratturarsi. Un altro problema studiato è la frattura ed il danneggiamento delle arterie (Figura 1.3(b)) a causa di azioni esterne (come l'angioplastica) o a processi di fatica spontanei dovuti alla pressione del sangue [21].

## 1.1 Scale dimensionali del problema

Lo studio di tali fenomeni può essere effettuato a diverse scale dimensionali, che vanno dalla lettura del processo a livello atomistico fino all'interpretazione macroscopica dello stesso (Figura 1.4).

*Macro meccanica*

*Micro meccanica*

In macro meccanica si identifica il componente di riferimento come un mezzo omogeneo; l'approccio micro meccanico descrive invece il comportamento macroscopico di un materiale a partire dalla sua microstruttura, ovvero in base alle proprietà meccaniche dei componenti ed

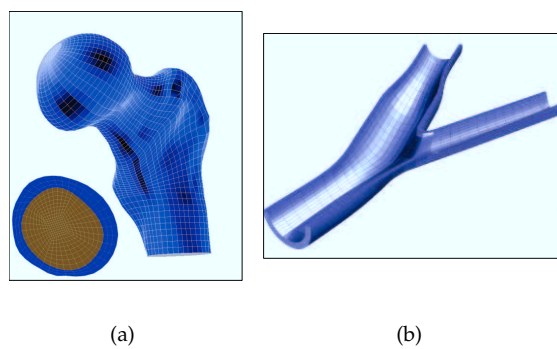


Figura 1.3: Modellazione FEM: (a) di un femore. (b) di un tratto di arteria.

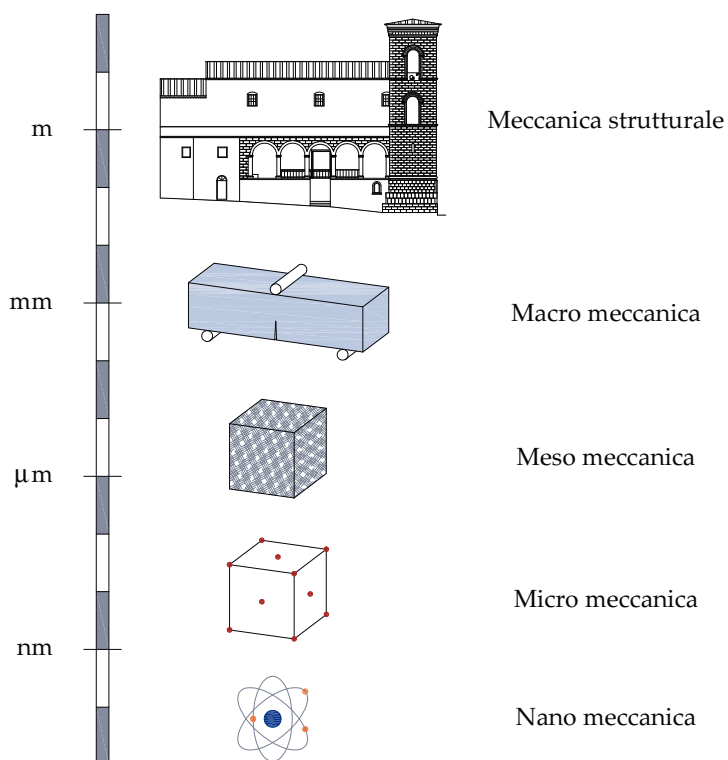


Figura 1.4: Scale dimensionali [65]

Meso meccanica

Nano meccanica

alla distribuzione delle singole fasi presenti attraverso una omogeneizzazione. L'approccio meso meccanico si colloca in via intermedia considerando ad esempio l'interazione tra una matrice composita interpretata come un omogeneo e particelle o aggregati di particelle. In nano meccanica si considerano i processi che avvengono a livello atomistico e molecolare.

Nella presente tesi si focalizzerà l'attenzione sullo studio del comportamento dei materiali a livello macroscopico.

## 1.2 Comportamento macroscopico dei materiali

Gli esperimenti condotti da von Karmàn nei primi decenni del XX secolo mostrarono che dei campioni di roccia sottoposti a pressione idrostatica esibivano deformazioni plastiche, caratterizzate da bande di taglio. Successivamente lo stesso effetto fu osservato in altri materiali quali il calcestruzzo, le ceramiche, la sabbia, il terreno, i metalli e così via. Si osserva una zona con concentrazione di deformazioni inela-

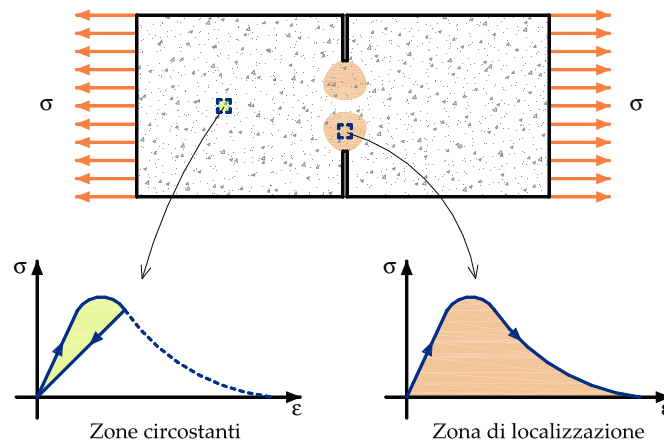


Figura 1.5: Comportamento di solidi con zone di localizzazione

Zona di localizzazione

stiche in una banda ristretta, chiamata *zona di localizzazione*, mentre le zone circostanti si scaricano (Figura 1.5). Il fenomeno della localizzazione è causato dalla presenza di vuoti, microfratture ed imperfezioni a livello microscopico; a livello macroscopico vengono osservati fratture

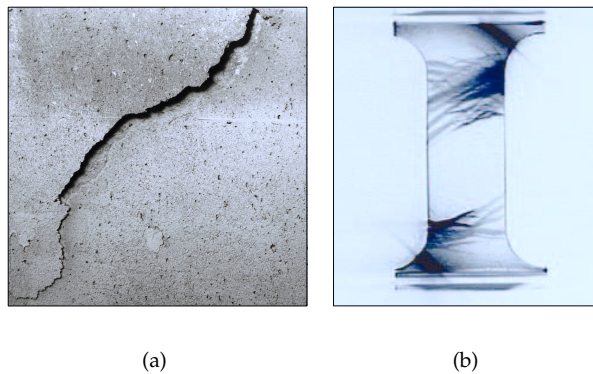


Figura 1.6: (a) Frattura in calcestruzzo. (b) Bande di taglio in provino di acciaio.

nelle rocce o nel calcestruzzo (Figura 1.6(a)), bande di taglio nei metalli (Figura 1.6(b)) e superfici di scorrimento nei terreni (Figura 1.7).

Dal punto di vista della modellazione macroscopica, la localizzazione può essere interpretata come un fenomeno di instabilità materiale (biforcazione materiale). L'innesco della localizzazione corrisponde ad una condizione di instabilità del legame costitutivo che descrive le deformazioni inelastiche del materiale. Ulteriori dettagli possono essere rintracciati in [10] e [65].

*Approccio  
macroscopico*

### 1.3 Approcci classici per modellare i meccanismi di frattura

I due contesti maggiormente accreditati per modellare i meccanismi di frattura e di collasso dei materiali a livello macroscopico sono la Meccanica della Frattura e la Meccanica del Continuo.

#### 1.3.1 Meccanica della frattura lineare elastica

I primi impulsi allo studio della meccanica della frattura vennero da parte di Kirsch, che nel 1898 studiò, nell'ambito della teoria dell'elasticità, la concentrazione di sforzo intorno ad un foro circolare praticato su una lastra di grandi dimensioni (Figura 1.8(a)). Nel 1913 Inglis estese i risultati ottenuti da Kirsch alla lastra con foro ellittico (Figura

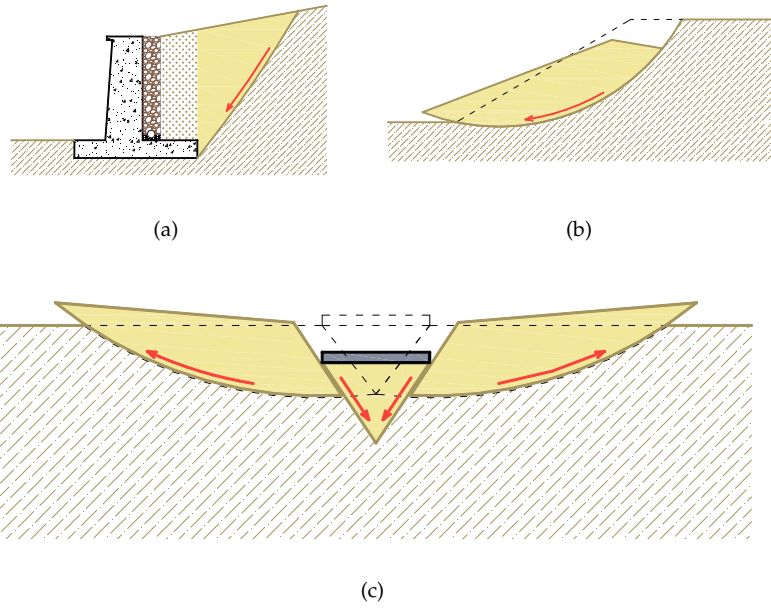


Figura 1.7: Superfici di scorrimento nei terreni: (a) muro di sostegno, (b) pendio naturale e (c) fondazione superficiale.



1.8(b)). Per  $a/b \rightarrow \infty$  il valore della tensione sul bordo del foro con asse maggiore ortogonale alla forza esterna tende anch'esso all'infinito (Figura 1.8(c)). Pertanto sono sufficienti tensioni esterne molto piccole per superare la resistenza a trazione. Nella realtà tuttavia i solidi fessurati possono resistere anche a sollecitazioni considerevoli.

Successivamente, nel 1921, Griffith utilizzò i risultati ottenuti da Inglis per predire lo stato tensionale critico che causa la propagazione di fratture nel materiale [9]. Egli, al fine di superare le limitazioni del modello di Inglis, propose un criterio basato su considerazioni energetiche. In particolare suppose che, affinché una fessura preesistente di lunghezza  $2a$  si propaghi, l'energia elastica rilasciata debba risultare maggiore o uguale a quella richiesta per estendere la fessura stessa:

*Criterio energetico di Griffith*

$$\frac{dW_e}{da} \geq \frac{dW_s}{da}$$

dove

$$W_e = \pi a^2 \frac{\sigma^2}{E}$$

$$W_s = 2aG_f.$$

nella quale  $G_f$  è l'energia di frattura, ovvero l'energia necessaria per far aprire una frattura di area unitaria. La condizione di instabilità, perchè la fessura si propaghi, è perciò:

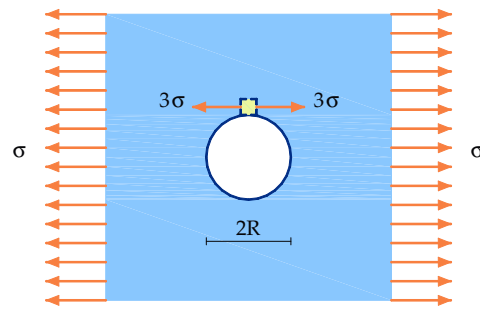
$$\sigma \geq \sqrt{\frac{G_f E}{\pi a}}$$

Il secondo membro dell'espressione precedente rappresenta la tensione di instabilità in funzione della semilunghezza della fessura. che per  $a \rightarrow 0$ , tende all'infinito. Tale risultato non è coerente con la supposta esistenza di una resistenza finita  $f_0$  del materiale costituente la lastra. È possibile allora definire una lunghezza  $2a_0$  della fessura, al di sotto della quale lo snervamento a trazione dell'intera lastra precede la propagazione instabile della fessura:

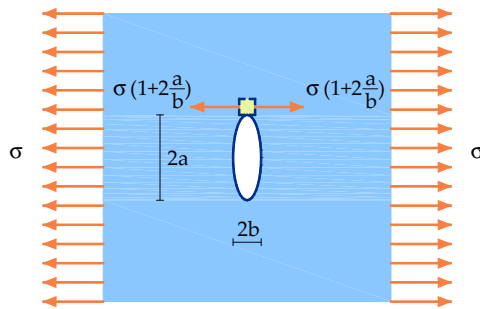
$$a_0 = \frac{1}{\pi} \frac{G_f E}{f_0^2}. \quad (1.1)$$

La lunghezza  $2a_0$  rappresenta la lunghezza equivalente delle microfessure e dei difetti, preesistenti nel materiale della lastra.

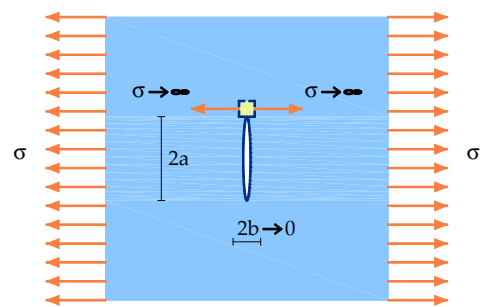
L'equazione (1.1) offre una spiegazione alle rotture fragili riscontrate nelle navi liberty discusse all'inizio del capitolo. Le dimensioni



(a)



(b)



(c)

Figura 1.8: Concentrazione delle tensioni sul bordo di fori e difetti.

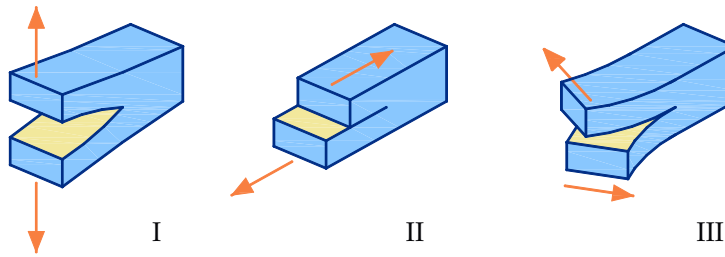


Figura 1.9: Modi fondamentali di frattura

delle navi, infatti, sono di diversi ordini di grandezza superiore rispetto alle dimensioni di un provino da laboratorio, che invece mostrano comportamento duttile e resistenze più alte.

Nella Figura 1.9 sono riportati i modi elementari di sollecitazione della fessura, definiti da Irwin nel 1957: Modo I (apertura), Modo II (scivolamento nel piano) e Modo III (strappo).

Successivamente, nel 1939, Westergaard individuò la potenza della singolarità che le tensioni presentano all'estremità della fessura, definendo il fattore di intensificazione degli sforzi. Egli estese tali risultati anche ai casi di Modo II, quei casi in cui la fessura subisce sollecitazioni antisimmetriche rispetto al proprio asse.

*Modi fondamentali di frattura*

### 1.3.2 Approccio con fratture discrete

L'approccio con fratture discrete, basato sul modello di frattura coesiva, è stato introdotto nel 1976 da Hillerborg [24].

Il materiale viene caratterizzato da due coppie di leggi costitutive:

- una relazione tensione/deformazione per il continuo non danneggiato, solitamente elastica o elastoplastica con incrudimento positivo,
- ed una relazione tensione/apertura della frattura (Figura 1.10) con comportamento softening.

Dalla Figura 1.10 si evince che è possibile distinguere due zone: una, detta *zona coesiva*, danneggiata ma dove vengono trasmesse ancora tensioni da una parte all'altra della frattura ( $w < w_{cr}$ ); l'altra dove è avvenuta la completa apertura ( $w > w_{cr}$ ) e risulta perciò scarica.

*Modello di frattura coesiva*

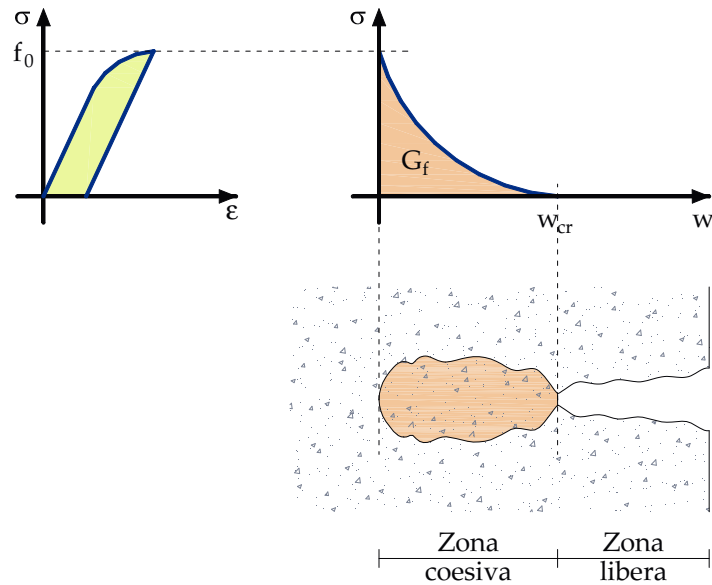


Figura 1.10: Modello di frattura coesiva

Energia di frattura

L'area sottesa dalla curva definita dalla relazione tensione/apertura della frattura risulta pari all'energia di frattura  $G_f$ , che formalmente può essere definita

$$G_f = \int_0^{w_{cr}} \sigma dw \quad (1.2)$$

Modellazione agli elementi finiti

dove  $\sigma$  è la tensione normale trasmessa e  $w$  è l'apertura della frattura.

La modellazione numerica dell'approccio con fratture discrete nell'ambito del metodo agli elementi finiti prevede l'utilizzo di specifici elementi di interfaccia di spessore nullo, zero-thickness element [22]. Tale interfaccia è detta interelemento in quanto viene interposta tra gli elementi finiti standard definiti dalla discretizzazione.

Il percorso di propagazione risulta fissato a priori, attraverso l'adozione della discretizzazione del dominio. Pertanto, per poter modellare la propagazione delle interfacce nel continuo sono necessarie tecniche di aggiornamento della discretizzazione (remeshing) [6, 11, 2, 16].

### 1.3.3 Approccio al continuo con fratture distribuite

Nell'approccio al continuo con fratture distribuite (*Smearred crack approach*), proposto da Bažant nel 1983 [3], si immaginano infinite fessure con apertura infinitamente piccola distribuite in tutto il corpo, considerato un mezzo continuo. Detto approccio si presta molto bene ad essere implementato nell'ambito del Metodo agli Elementi Finiti, poichè i comportamenti del continuo e delle fratture vengono trattati in maniera unica nel contesto della meccanica del continuo. Diversi i contributi in letteratura, tra i quali [44, 41, 66]

Tuttavia l'approccio al continuo con fratture distribuite non è scevro da problemi. L'elemento finito attraversato esibisce la completa perdita di rigidezza in corrispondenza dell'innescò della frattura. Ciò provoca malcondizionamenti della matrice di rigidezza globale del sistema che tende a diventare singolare. Inoltre, la necessita di utilizzare legami costitutivi softening per simulare il decremento delle tensioni all'aumentare delle deformazioni una volta superato il picco, rende la risposta del sistema dipendente dalla discretizzazione adottata per il dominio (*mesh dependency*).

Con riferimento al calcestruzzo, al giorno d'oggi vengono utilizzati due modelli basati sull'approccio al continuo con fratture distribuite: il modello con frattura fissa (*fixed-crack model*) e il modello con frattura rotante (*rotating-crack model*) [40]. Nel primo modello non appena la tensione principale di trazione accinge il valore di resistenza a trazione del calcestruzzo, la frattura si forma ortogonalmente alla corrispondente direzione principale mantenendo costante la propria direzione. Viceversa, il modello con frattura rotante prevede la possibilità che la direzione della frattura cambi durante il processo di carico. Il modello standard di frattura rotante, proposto da Cope nel 1980, è affetto da problemi di *stress locking*. Alcuni autori nell'intento di ridurre le tensioni spurie hanno usato il modello in combinazione con legami costitutivi con danno [27, 33, 32, 59, 56, 53].

Inoltre in [4] è mostrato che nei problemi di localizzazione l'energia dissipata da un mezzo continuo con comportamento softening è nulla, fenomeno che implica la non oggettività della risposta.

Al fine di superare tale difficoltà è stato sviluppato un modello, detto *Crack Band Model*, nell'ambito del quale si immagina di distribuire le fratture in una regione ristretta del corpo, chiamata banda di localizzazione. Detta ipotesi si trova in accordo con le osservazioni sperimentali descritte al paragrafo 1.2.

Al fine di definire il legame costitutivo del continuo, in questo mo-

*Fixed-crack vs.  
rotating-crack  
model*

*Crack band model*

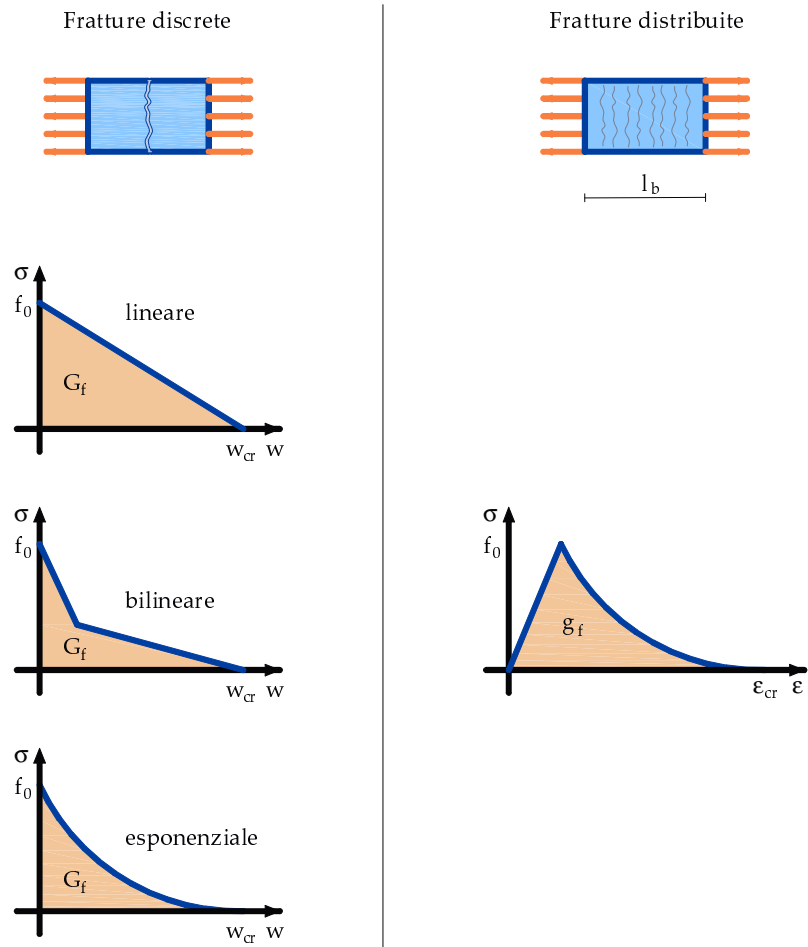


Figura 1.11: Confronto tra approccio discreto [24] ed approccio al continuo [3].

dello l'energia di frattura definita dalla (1.2) viene distribuita nello spessore  $l_b$  della banda. Indicando con  $\varepsilon_b$  la deformazione normale alla direzione della frattura nella banda di localizzazione, l'apertura infinitesima è data dalla relazione:

$$dw = l_b d\varepsilon_b$$

che sostituita nella (1.2) la trasforma:

$$G_f = l_b \underbrace{\int_0^{\varepsilon_{cr}} \sigma d\varepsilon_b}_{g_f}.$$

La quantità  $g_f$ , energia per unità di volume, può essere espressa come il rapporto tra l'energia di frattura e la larghezza della banda:

$$g_f = \frac{G_f}{l_b} \quad (1.3)$$

e rappresenta l'area sottesa dalla curva tensione/deformazione che definisce il legame costitutivo del continuo fratturato (Figura 1.11).

L'approccio al continuo con fratture distribuite può dare luogo ad una sovrastima delle tensioni tangenziali che si sviluppano in seno alla struttura, effetto noto con il nome di shear locking. Inoltre sono richieste discretizzazioni geometriche molto fitte al fine di cogliere gli spostamenti, che nella banda di localizzazione presentano brusche variazioni.

## 1.4 Approcci con arricchimento della cinematica

I problemi formulati nel contesto della meccanica del continuo che coinvolgono materiali con comportamento softening affrontati risultano mal posti e presentano le patologie descritte al paragrafo precedente.

I modelli di frattura coesiva, che prevedono l'utilizzo di elementi di interfaccia interposti agli elementi finiti standard (interfacce interelemento), presentano difficoltà computazionali a causa del remeshing (vedi paragrafo 1.3.2).

Al fine di superare tali limiti il continuo viene arricchito, in modo da regolarizzare le equazioni che reggono il problema, mantenendole di forma ellittica [34].

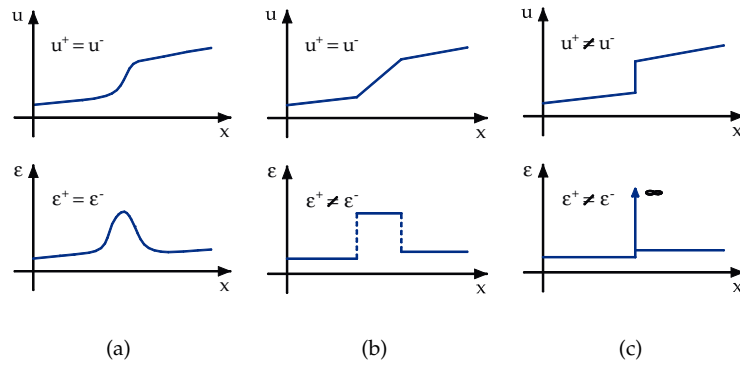


Figura 1.12: Campi di spostamento e di deformazione. Confronti tra i modelli: (a) di frattura diffusa, (b) con discontinuità deboli e (c) con discontinuità forti

Continuo di  
Cosserat

Un primo esempio di continuo arricchito è quello proposto nel 1909 dai fratelli Cosserat, che assume come parametri indipendenti, oltre alle traslazioni, le rotazioni locali in ogni punto materiale. Detto modello è stato esteso al problema della localizzazione delle deformazioni [25], descrivendo la microstruttura del materiale con un parametro detto *lunghezza interna*.

Altri tipi di arricchimento della cinematica possono essere perseguiti sommando ai campi di deformazione o di spostamento regolari dei campi discontinui.

In letteratura sono reperibili diverse formulazioni che includono discontinuità, che possono essere classificate dal punto di vista cinematico.

Discontinuità deboli  
e discontinuità forti

I modelli con discontinuità deboli [52, 29, 30] sono caratterizzati da salti nel campo delle deformazioni (Figura 1.12(b)), mentre i modelli con discontinuità forti presentano salti nel campo degli spostamenti [60, 19, 45, 46].

Essi trovano applicazione specialmente nel campo della simulazione del comportamento di materiali fragili, quali il calcestruzzo ed il terreno [49, 8].

### 1.4.1 Approccio alle discontinuità forti

In [47] è stato introdotto l'approccio continuo alle discontinuità forti (CSDA), nel quale la discontinuità forte è considerata il caso limite del-



la discontinuità debole per larghezza della banda di localizzazione nulla. Il modello è stato successivamente sviluppato nei lavori presentati in [43, 48].

Altri autori definiscono separatamente la legge costitutiva della frattura in maniera indipendente dal continuo [36, 39, 37, 38].

Nell'ambito del metodo agli elementi finiti, l'arricchimento della cinematica può essere perseguito a livello nodale o a livello dell'elemento finito [66, 18, 50].

Nel primo caso l'arricchimento consiste nell'introduzione di funzioni di forma nodali aggiuntive in tutti gli elementi attraversati dalla discontinuità. Il supporto di tali funzioni è costituito dagli elementi finiti che hanno in comune il nodo arricchito (Figura 1.13(b)). I gradi di libertà relativi alle funzioni nodali sono considerati a livello globale con conseguente aumento della dimensione del problema. Molte delle formulazioni rintracciabili in letteratura appartenenti a questa famiglia sono state sviluppate nel contesto del metodo della partizione dell'unità sotto il nome di eXtended Finite Element Method (XFEM) [35, 63, 5, 67, 62].

*XFEM*

Nel secondo caso il supporto della funzione di forma di arricchimento è un dato elemento finito con discontinuità immersa (EED). I gradi di libertà addizionali relativi a tali funzioni di forma sono considerati locali (Figura 1.13(a)) e possono essere condensati a livello dell'elemento. In tal modo si lascia inalterata la dimensione del problema e non si accresce l'onere computazionale dell'analisi [26, 37, 28, 15, 41].

*EED*

Nel lavoro [26] sono confrontate le formulazioni con discontinuità immerse presenti in letteratura, evidenziando le differenze tra i diversi tipi di arricchimento cinematico e le diverse condizioni di continuità delle tensioni. Si distinguono formulazioni simmetriche staticamente ottime SOS, formulazioni simmetriche cinematicamente ottime KOS e formulazioni non simmetriche staticamente e cinematicamente ottime SKON [29, 30, 45, 46].

Gli elementi derivati dalla formulazione SOS soddisfano la condizione di continuità delle trazioni ma non rappresentano appropriatamente la cinematica. Viceversa gli elementi derivati dalla formulazione KOS riproducono adeguatamente la discontinuità che caratterizza la cinematica delle discontinuità forti, ma non soddisfano la condizione di continuità delle trazioni. Il terzo approccio è in grado di rappresentare appropriatamente sia l'aspetto statico che quello cinematico, ma presenta una formulazione non simmetrica.

Le prime formulazioni con discontinuità immerse fanno uso di elementi triangolari lineari a tre nodi (CST) e il salto viene approssima-

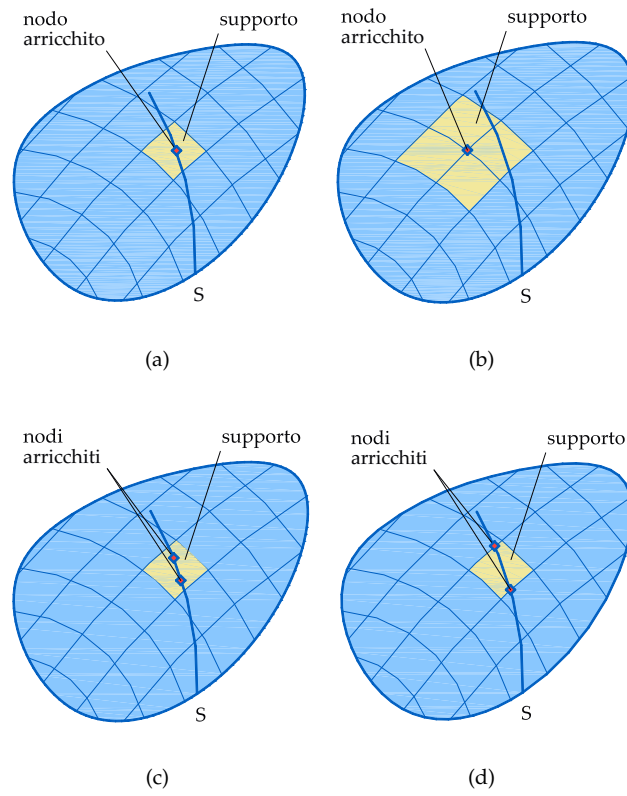


Figura 1.13: Arricchimento. Confronti tra i modelli: (a) nodale (X-FEM), (b) elementare (EED), (c) elementare con salto lineare e gdl locali e (d) elementare con salto lineare e gdl globali.

to costante. Pertanto il salto non risulta continuo in corrispondenza dei bordi degli elementi finiti, causa di potenziale fenomeni di locking [26, 28].

In [1] è presentata una formulazione che adotta un approssimazione del salto lineare. I gradi di libertà addizionali vengono considerati sia a livello locale (Figura 1.13(c)) sia a livello globale (Figura 1.13(d)); chiaramente nel secondo caso le dimensioni del problema aumentano.

In [7] vengono impiegati elementi triangolari CST con approssimazione del salto lineare, ma gradi di libertà locali.

Recentemente in [31, 51] ed in [18] sono state introdotte approssimazioni lineari per il salto all'interno dell'elemento finiton rispettivamente mediante una formulazione locale ed una globale basata sull'approccio discreto (DSDA).

## 1.5 Obiettivi e contenuto della tesi

La tesi si rivolge alla modellazione numerica del fenomeno di formazione e di propagazione di interfacce intraelemento nel contesto dell'approccio alle discontinuità forti.

Dall'analisi della letteratura citata si nota che le definizioni delle equazioni di stato del problema basate su cinematica arricchita non sempre sono consistenti. Spesso leggi ad hoc intervengono nella risoluzione. Approcci basati sulla formulazione energetica sono presenti in [18], ma una trattazione esaustiva ed unitaria dalla formulazione all'implementazione numerica dell'algoritmo risolutivo sembra mancante.

La tesi si pone come obiettivo la definizione di un ambiente variazionale di carattere generale in cui derivare le equazioni che regolano il problema, in modo che esse risultino tutte consistenti tra loro, garantendo la robustezza dell'algoritmo risolutivo.

A partire da tale formulazione si è sviluppata una strategia di soluzione che permette di risolvere il problema del solido elastoplastico attraversato da discontinuità forti nell'ambito del metodo degli elementi finiti. In particolare si indaga sulla possibilità di utilizzare elementi finiti con discontinuità immerse che utilizzano approssimazioni lineari per il salto nel campo di spostamento.

A tal fine nel secondo capitolo è sviluppata la formulazione del problema del solido elastoplastico attraversato da discontinuità forti, ottenuta per via variazionale.

Nel terzo capitolo è proposta una strategia di soluzione numerica del problema, modellato nell'ambito del metodo agli elementi finiti, valida sia per approssimazioni costanti che per approssimazioni lineari del salto nel campo degli spostamenti.

L'algoritmo di soluzione è stato implementato nel codice di calcolo *FracSDA8*, realizzato ad hoc in ambiente *MatLab*.

Nel quarto capitolo vengono infine presentate alcune analisi numeriche condotte con il codice *FracSDA8*, al fine di provare il corretto funzionamento del programma e di validare l'algoritmo di soluzione proposto nel capitolo tre. I risultati ottenuti con le analisi numeriche effettuate con elementi con approssimazione del salto costante e quelle effettuate con elementi con approssimazione del salto lineare sono stati confrontati con risultati numerici e dati sperimentali reperibili in letteratura.

## Capitolo 2

# PROBLEMA DEL SOLIDO ATTRAVERSATO DA DISCONTINUITÀ FORTI

Nel capitolo viene presentata la formulazione del problema del solido elastoplastico attraversato da discontinuità forti. Dopo aver descritto la cinematica delle discontinuità forti e i legami costitutivi adottati per il continuo e per l'interfaccia, si sono ricavate per via variazionale le equazioni che governano il problema. Infine si riporta un semplice esempio applicativo.

### 2.1 Notazione

Si richiama brevemente la notazione utilizzata nel capitolo per indicare le grandezze e gli operatori. Al fine di esprimere le equazioni che governano il problema in *forma operatoriale*, le componenti indipendenti dei tensori del secondo ordine, definiti nell'ambito della meccanica del continuo per descrivere lo stato deformativo e tensionale, sono raccolte in vettori. Analogamente le componenti indipendenti dei tensori del quarto ordine, utilizzati per caratterizzare i legami costitutivi, sono raccolte in matrici.

### Operatori e grandezze cinematiche

Le sei componenti indipendenti del tensore di deformazione infinitesima sono raccolte nel vettore:

$$\varepsilon = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \gamma_{xy}]^T.$$

Le tre componenti del campo di spostamento nel vettore:

$$\mathbf{u} = [u_x, u_y, u_z]^T.$$

Equazioni di compatibilità

Le equazioni di compatibilità all'interno del continuo in forma operatoriale assumono l'espressione:

$$\varepsilon = \mathbf{C}\mathbf{u}$$

Operatore di congruenza

dove la matrice  $\mathbf{C}$  è l'operatore di congruenza:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.1)$$

Sulla frontiera vincolata si ha:

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}$$

Stati piani

nella quale con  $\bar{\mathbf{u}}$  si sono indicati gli spostamenti assegnati. Nel caso piano le espressioni precedenti si particolarizzano:

- vettore delle deformazioni

$$\varepsilon = [\varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{yz}]^T$$

- vettore degli spostamenti

$$\mathbf{u} = [u_y, u_z]^T$$

- operatore di congruenza

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}$$

### Operatori e grandezze statiche

Le sei componenti indipendenti del tensore di tensione sono raccolte nel vettore

$$\sigma = [\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}]^T,$$

le tre componenti delle forze di volume nel vettore

$$\mathbf{b} = [b_x, b_y, b_z]^T$$

ed infine le tre componenti delle forze di superficie nel vettore

$$\mathbf{q} = [q_x, q_y, q_z]^T.$$

Le equazioni indefinite di equilibrio nel continuo in forma operatoriale assumono l'espressione:

$$\mathbf{C}'\sigma = \mathbf{b}$$

*Equazioni indefinite di equilibrio*

dove la matrice  $\mathbf{C}'$  è l'operatore di equilibrio

*Operatore di equilibrio*

$$\mathbf{C}' = \begin{bmatrix} -\frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial}{\partial z} & -\frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & -\frac{\partial}{\partial y} & 0 & -\frac{\partial}{\partial z} & 0 & -\frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & -\frac{\partial}{\partial z} & -\frac{\partial}{\partial y} & -\frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix}; \quad (2.2)$$

sulla frontiera caricata si ha:

$$\mathcal{N}\sigma = \mathbf{q},$$

dove la matrice  $\mathcal{N}$ , i cui elementi sono le componenti della normale al contorno, è l'operatore di equilibrio al contorno

*Operatore di equilibrio al contorno*

$$\mathcal{N} = \begin{bmatrix} n_x & 0 & 0 & 0 & n_z & n_y \\ 0 & n_y & 0 & n_z & 0 & n_x \\ 0 & 0 & n_z & n_y & n_x & 0 \end{bmatrix}.$$

Dal confronti delle equazioni (2.1) e (2.2) si deduce la relazione:

*Proprietà di aggiuntezza*

$$\mathbf{C}' = -\mathbf{C}^T.$$

Nel caso piano le espressioni precedenti si particolarizzano:

*Stati piani*

- vettore delle tensioni

$$\sigma = [\sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}]^T$$

- vettore delle forze di volume

$$\mathbf{b} = [b_y, b_z]^T$$

- vettore delle forze di superficie

$$\mathbf{q} = [q_y, q_z]^T$$

- operatore di equilibrio

$$\mathbf{C}' = \begin{bmatrix} -\frac{\partial}{\partial y} & 0 & -\frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & -\frac{\partial}{\partial z} & -\frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}$$

- operatore di equilibrio al contorno

$$\mathcal{N} = \begin{bmatrix} n_y & 0 & n_z \\ 0 & n_z & n_y \end{bmatrix}$$

### Operatori e grandezze costitutive

Si riporta la relazione costitutiva tra vettore delle tensioni e vettore delle deformazioni in forma operatoriale nel caso di legame iperelastico lineare:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}\boldsymbol{\varepsilon}$$

dove  $\mathbf{E}$  è la matrice elastica:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ & & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ & & & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ & sim. & & & c_{55} & c_{56} \\ & & & & & c_{66} \end{bmatrix}.$$

Stati piani

Nel caso di stato piano di tensione la matrice elastica lineare isotropa si particularizza:

$$\mathbf{E} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix};$$

nel caso di stato piano di deformazione diventa invece:

$$\mathbf{E} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix},$$

dove  $E$  è il modulo di elasticità normale,  $\nu$  il coefficiente di Poisson.



## 2.2 Cinematica delle discontinuità forti

Al fine di descrivere la cinematica delle discontinuità forti, che ammette salti nel campo degli spostamenti, si consideri il solido di figura 2.1(a) che occupa la regione di spazio  $\Omega$ .

La parte di frontiera del solido  $\partial\Omega_q$  risulta caricata, mentre sulla parte di frontiera  $\partial\Omega_u$  sono impressi degli spostamenti assegnati  $\bar{\mathbf{u}}$ .

Sia  $S$  una superficie (detta interfaccia) interna al solido in corrispondenza della quale il campo degli spostamenti presenta una discontinuità. Si consideri la parte di solido  $\Omega_\varphi$  interamente attraversato dall'interfaccia, il quale risulta diviso in due regioni  $\Omega_\varphi^+$  e  $\Omega_\varphi^-$ . Indicata con  $\mathbf{n}$  la normale all'interfaccia, la regione  $\Omega_\varphi^+$  è la parte individuata dal verso positivo di  $\mathbf{n}$ .

Il campo degli spostamenti all'interno della regione  $\Omega_\varphi$  può quindi essere pensato come la somma di una parte regolare  $\hat{\mathbf{u}}$  e di una parte singolare  $\tilde{\mathbf{u}}$  come evidenziato nella figura 2.2:

*Spostamenti*

$$\mathbf{u} = \underbrace{\hat{\mathbf{u}}}_{\text{regolare}} + \underbrace{\tilde{\mathbf{u}}}_{\text{singolare}},$$

dal quale si può derivare il corrispondente campo di deformazione:

*Deformazioni*

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C}\mathbf{u} = \mathbf{C}\hat{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\tilde{\mathbf{u}}. \quad (2.3)$$

La funzione  $\hat{\mathbf{u}}$  è continua e differenziabile in tutti i punti del suo supporto  $\Omega$ , mentre la funzione  $\tilde{\mathbf{u}}$  è continua e differenziabile in tutti i punti del suo supporto  $\Omega_\varphi$  tranne che in corrispondenza della superficie  $S$ . Inoltre, indicato con  $[[\mathbf{u}]]_S$  il salto che il campo di spostamento presenta in corrispondenza dell'interfaccia  $S$ , la funzione  $\tilde{\mathbf{u}}$  è tale da risultare (figura 2.2):

*Salto nel campo di spostamento*

$$[[\mathbf{u}]]_S = [[\tilde{\mathbf{u}}]] = \tilde{\mathbf{u}}^+ - \tilde{\mathbf{u}}^- \quad (2.4)$$

$$\tilde{\mathbf{u}} = 0 \quad \text{su} \quad \partial\Omega_{\varphi,t} \cup \partial\Omega_{\varphi,u}$$

dove  $\tilde{\mathbf{u}}^+$  e  $\tilde{\mathbf{u}}^-$  rappresentano rispettivamente i valori del campo di spostamento singolare  $\tilde{\mathbf{u}}$  a destra ed a sinistra dell'interfaccia.

## 2.3 Modello costitutivo

Lo stato del sistema è descritto a livello fenomenologico da due insiemi di variabili, rispettivamente relativi al continuo ed all'interfaccia, e dai meccanismi di scambio dell'energia, distinguendo tra fenomeni

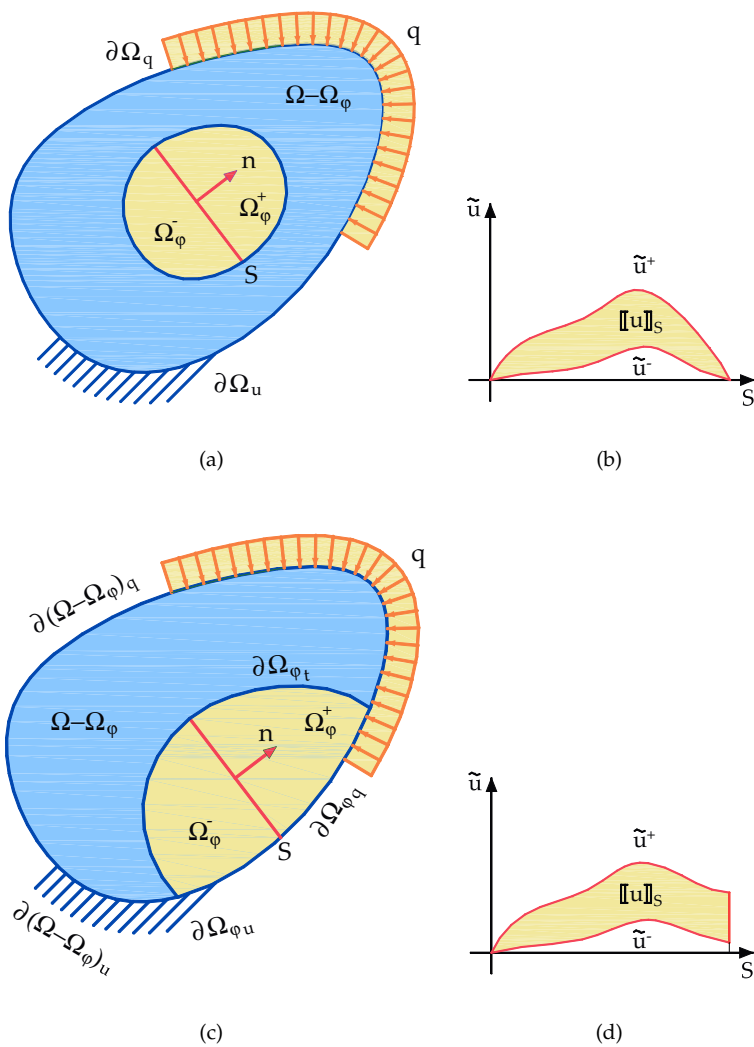


Figura 2.1: Solido attraversato da un'interfaccia: (a) e (b) interna, (c) e (d) con un estremo sulla frontiera.

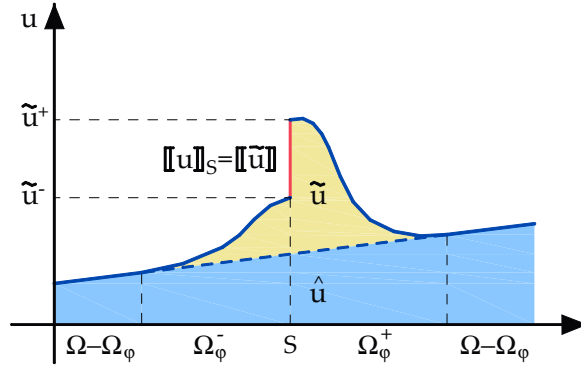


Figura 2.2: Campo degli spostamenti all'interno della regione  $\Omega_\varphi$ .

reversibili, che modificano l'energia immagazzinata, e fenomeni irreversibili, che causano la dissipazione di energia [12, 14]. In particolare si assume un comportamento elastoplastico incrudente per il continuo ed elastoplastico con softening per l'interfaccia.

Per il continuo, oltre alle deformazioni  $\varepsilon$ , è stata introdotto un vettore di variabili interne  $\alpha$ , che ne descrive l'incrudimento. Le variabili che descrivono il comportamento dell'interfaccia sono il salto  $[[\mathbf{u}]]_S$  e la variabile interna  $\alpha_S$ . In definitiva le variabili cinematiche e le associate variabili duali statiche considerate sono:

*Variabili che descrivono il comportamento costitutivo*

$\varepsilon$	deformazioni continuo	$\sigma$	tensioni continuo
$\alpha$	v.c. interna continuo che descrive l'incrudimento	$\chi$	v.s. interna continuo
$[[\mathbf{u}]]_S$	salto interfaccia	$\mathbf{t}_S$	trazioni all'interfaccia
$\alpha_S$	v.c. interna interfaccia che descrive il softening	$\chi_S$	v.s. interna interfaccia

Ogni variabile cinematica si può additivamente decomporre in una parte reversibile, indicata con il pedice  $e$ , ed in una parte irreversibile, indicata con il pedice  $p$ :

*Additività delle variabili cinematiche*

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p \tag{2.5}$$

$$\underbrace{\alpha}_{=0} = \alpha_e + \alpha_p \tag{2.6}$$

$$[[\mathbf{u}]]_S = [[\mathbf{u}]]_{S_e} + [[\mathbf{u}]]_{S_p} \tag{2.7}$$

$$\underbrace{\alpha_S}_{=0} = \alpha_{Se} + \alpha_{Sp} \quad (2.8)$$

Poichè il lavoro della variabile interna  $\alpha_S$  deve risultare nullo [12], il suo valore totale deve essere zero, ovvero la sua parte elastica e la sua parte irreversibile risultano opposte.

Le relazioni costitutive possono essere definite attraverso la scelta di funzionali dell'energia interna e di funzionali di dissipazione, i quali dipendono rispettivamente dalle componenti reversibile e irreversibile delle variabili cinematiche [20]. In maniera duale, si possono scegliere funzionali complementari dell'energia interna e funzionali complementari di dissipazione, definiti rispettivamente in termini delle componenti reversibili e irreversibili delle variabili statiche.

### 2.3.1 Comportamento reversibile del continuo

La relazione costitutiva del continuo può essere definita attraverso il funzionale dell'energia libera specifica di Helmholtz  $F$  [12]. In accordo alla ipotesi di materiale standard generalizzato [23], tale funzionale è dato dalla somma del potenziale elastico  $\varphi(\varepsilon_e)$  e del potenziale di incrudimento  $\pi(\alpha_e)$ :

$$F(\varepsilon_e, \alpha_e) = \varphi(\varepsilon_e) + \pi(\alpha_e).$$

*Legame diretto del continuo*

Dal primo è possibile derivare le tensioni

$$\sigma = \frac{\partial \varphi(\varepsilon_e)}{\partial \varepsilon_e}, \quad (2.9)$$

dal secondo le variabili statiche interne:

$$\chi = \frac{\partial \pi(\alpha_e)}{\partial \alpha_e} \quad (2.10)$$

Il legame inverso è derivato dal potenziale elastico  $\varphi'(\sigma)$  e dal potenziale di incrudimento  $\pi'(\chi)$  complementari, definiti rispettivamente in funzione dei potenziali  $\varphi(\varepsilon)$  e  $\pi(\alpha)$  attraverso la trasformata di Legendre

*Trasformata di Legendre*

$$\varphi'(\sigma) = \sup_{\varepsilon_e} [\sigma^T \varepsilon_e - \varphi(\varepsilon_e)]$$

$$\pi'(\chi) = \sup_{\alpha_e} [\chi^T \alpha_e - \pi(\alpha_e)]$$

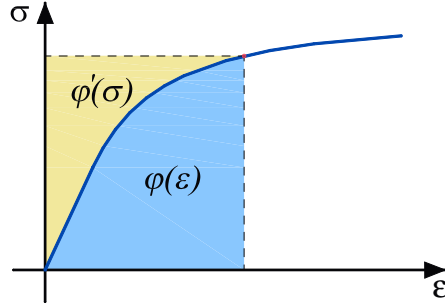


Figura 2.3: Potenziale elastico e potenziale complementare legati attraverso la Trasformata di Legendre.

dalle quali è possibile ricavare le deformazioni

$$\varepsilon_e = \frac{\partial \varphi'(\sigma)}{\partial \sigma} \quad (2.11)$$

e le variabili cinematiche interne

$$\alpha_e = \frac{\partial \pi'(\chi)}{\partial \chi} \quad (2.12)$$

*Legame inverso del continuo*

Nel caso di legame elastico lineare e di incrudimento lineare il potenziale elastico ed il potenziale di incrudimento assumono rispettivamente la forma

*Caso lineare*

$$\varphi(\varepsilon_e) = \frac{1}{2} \varepsilon_e^T \mathbf{E} \varepsilon_e$$

$$\pi(\alpha_e) = \frac{1}{2} \alpha_e^T \mathbf{H} \alpha_e.$$

Analogamente le espressioni per i relativi potenziali complementari diventano

$$\varphi'(\sigma) = \frac{1}{2} \sigma^T \mathbf{E}^{-1} \sigma$$

$$\pi'(\chi) = \frac{1}{2} \chi^T \mathbf{H}^{-1} \chi$$

dove  $\mathbf{E}$  è la matrice costitutiva elastica e  $\mathbf{H}$  è la matrice costitutiva che descrive l'incrudimento.

Il legame diretto (2.9) e (2.10) diventa pertanto

$$\sigma = \mathbf{E} \varepsilon_e,$$

$$\chi = \mathbf{H}\alpha_e,$$

mentre il legame inverso (2.11) e (2.12) assume la forma

$$\varepsilon_e = \mathbf{E}^{-1}\sigma,$$

$$\alpha_e = \mathbf{H}^{-1}\chi.$$

### Comportamento reversibile del continuo in termini di velocità

Si assume che le velocità di tensione e le velocità delle variabili statiche interne possano essere derivate rispettivamente dal potenziale elastico e di incrudimento tangente:

$$\dot{\sigma} = \frac{\partial \varphi_t(\varepsilon_e, \dot{\varepsilon}_e)}{\partial \dot{\varepsilon}_e} \quad (2.13a)$$

$$\dot{\chi} = \frac{\partial \pi_t(\alpha_e, \dot{\alpha}_e)}{\partial \dot{\alpha}_e} \quad (2.13b)$$

dove, nell'ipotesi che i potenziali elastico e di incrudimento risultino differenziabili due volte secondo Gateaux,

*Potenziali tangenti del continuo*

$$\varphi_t(\varepsilon_e, \dot{\varepsilon}_e) = \frac{1}{2} \dot{\varepsilon}_e^T \frac{\partial^2 \varphi(\varepsilon_e)}{\partial \varepsilon_e^2} \dot{\varepsilon}_e$$

$$\pi_t(\alpha_e, \dot{\alpha}_e) = \frac{1}{2} \dot{\alpha}_e^T \frac{\partial^2 \varphi(\alpha_e)}{\partial \alpha_e^2} \dot{\alpha}_e$$

Sostituendo si ottengono le espressioni del legame diretto in termini di velocità:

*Legame diretto del continuo*

$$\dot{\sigma} = \frac{\partial^2 \varphi(\varepsilon_e)}{\partial \varepsilon_e^2} \dot{\varepsilon}_e \quad (2.14a)$$

$$\dot{\chi} = \frac{\partial^2 \varphi(\alpha_e)}{\partial \alpha_e^2} \dot{\alpha}_e \quad (2.14b)$$

### 2.3.2 Comportamento irreversibile del continuo

Analogamente a quanto discusso al paragrafo 2.3.1, la relazione costitutiva che descrive la parte irreversibile del comportamento del continuo può essere definita attraverso la funzione di dissipazione, che, nell'ipotesi di validità del postulato della massima dissipazione, assume l'espressione:

*Funzione di dissipazione del continuo*

$$d(\dot{\varepsilon}_p, \dot{\alpha}_p) = \sup_{\sigma, \chi} [\sigma^T \dot{\varepsilon}_p + \chi^T \dot{\alpha}_p]. \quad (2.15)$$

La funzione di dissipazione, pensata in generale non regolare (*non smooth function*), è scelta in modo tale che risulti un *gauge*, ovvero che goda delle seguenti proprietà:

- $d(\dot{\varepsilon}_p, \dot{\alpha}_p) \geq 0, \forall (\dot{\varepsilon}_p, \dot{\alpha}_p),$
- $d(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = 0,$
- $d(\dot{\varepsilon}_p, \dot{\alpha}_p)$  sia convessa, positivamente omogenea e inferiormente semicontinua.

Per tale funzione, nell'ambito dell'analisi convessa [58] è possibile definire l'operatore sottodifferenziale:

$$\begin{aligned} \partial d = \{(\sigma, \chi) : d_S(\tilde{\varepsilon}_p, \tilde{\alpha}_p) \geq d(\dot{\varepsilon}_p, \dot{\alpha}_p) + \\ + \sigma^T(\tilde{\varepsilon}_p - \dot{\varepsilon}_p) + \chi(\tilde{\alpha}_p - \dot{\alpha}_p), \\ \forall (\tilde{\varepsilon}_p, \tilde{\alpha}_p)\} \end{aligned}$$

attraverso il quale è possibile ricavare le tensioni e la variabili interne in funzione di  $d_S$

$$(\sigma, \chi) \in \partial d(\dot{\varepsilon}_p, \dot{\alpha}_p) \quad (2.16)$$

*Legame diretto del continuo*

Si noti che se la funzione di dissipazione risultasse differenziabile il generico elemento del sottodifferenziale, detto sottogradiante, coinciderebbe con il gradiente locale della funzione.

Il legame costitutivo può essere anche ottenuto mediante la funzione  $d'$  coniugata alla funzione di dissipazione, definita attraverso la trasformata di Legendre:

$$d'(\sigma, \chi) = \sup_{\dot{\varepsilon}_p, \dot{\alpha}_p} [\sigma^T \dot{\varepsilon}_p + \chi^T \dot{\alpha}_p - d(\dot{\varepsilon}_p, \dot{\alpha}_p)] \quad (2.17)$$

dalla quale è possibile ricavare la velocità di deformazione plastica  $\dot{\varepsilon}_p$  e quella della variabile cinematica di incrudimento  $\dot{\alpha}_p$ :

$$(\dot{\varepsilon}_p, \dot{\alpha}_p) \in \partial d'(\sigma, \chi). \quad (2.18)$$

*Legame inverso del continuo*

Poichè  $d'$  è la funzione coniugata della funzione convessa, positivamente omogenea e inferiormente semicontinua  $d_S$ , la relazione (2.16) vale se e solo se vale la relazione (2.18), ovvero:

$$(\sigma, \chi) \in \partial d \iff (\dot{\varepsilon}_p, \dot{\alpha}_p) \in \partial d'.$$

### Analogia con la formulazione classica della plasticità

Nella formulazione classica della plasticità si assume che le tensioni nel continuo  $\sigma$  e la variabile statica interna  $\chi$  possano assumere valori all'interno di un insieme  $K$ , chiamato insieme degli stati ammissibili. L'interno di  $K$  è chiamato regione elastica mentre la sua frontiera è nota come superficie di snervamento. La superficie di snervamento può essere rappresentata attraverso una funzione  $g(\sigma, \chi)$  chiamata funzione di snervamento, tale che:

*Insieme degli stati ammissibili del continuo*

$$K = \{(\sigma, \chi) : g(\sigma, \chi) \leq 0\} \quad (2.19)$$

In accordo al postulato della massima dissipazione, dal quale discende la definizione di funzione di dissipazione data dalla (2.15), e ricordando che per ipotesi la funzione di dissipazione è un gauge, l'insieme  $K$  definito dalla (2.19) assume la forma:

$$K = \{(\sigma, \chi) : \sigma^T \dot{\epsilon}_p + \chi^T \dot{\alpha}_p \leq d(\dot{\epsilon}_p, \dot{\alpha}_p), \forall (\dot{\epsilon}_p, \dot{\alpha}_p)\}.$$

Detto insieme è caratterizzato dalle seguenti proprietà:

- l'insieme  $K$  è non vuoto, chiuso e convesso,
- la funzione di dissipazione  $d$  definita dalla (2.15) è la funzione supporto dell'insieme  $K$ :

*Funzione di dissipazione del continuo*

$$d = \text{supp}K$$

dove, per definizione:

$$\text{supp}K = \sup_{(\sigma, \chi) \in K} [\sigma^T \dot{\epsilon}_p + \chi^T \dot{\alpha}_p] \quad (2.20)$$

- la funzione coniugata  $d'$  della funzione di dissipazione, definita attraverso la trasformata di Legendre in (2.17), è la funzione indicatrice dell'insieme  $K$ :<sup>1</sup>

*Funzione di dissipazione complementare del continuo*

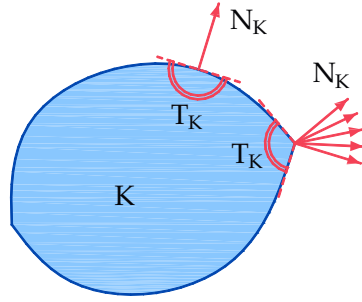
$$d' = \text{ind}K \quad (2.21)$$

dove, per definizione:

$$\text{ind}K = \begin{cases} 0, & (\sigma, \chi) \in K \\ +\infty, & (\sigma, \chi) \notin K \end{cases}$$

<sup>1</sup>Si ricorda infatti che la funzione indicatrice è la funzione coniugata della funzione supporto.



Figura 2.4: Esempio di coni delle normali all'insieme convesso  $K$ 

- $K = \partial d(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ .

Sostituendo le relazioni (2.20) e (2.21) rispettivamente nelle equazioni costitutive (2.16) e (2.18) si ottiene:

$$(\sigma, \chi) \in \partial \text{supp} K$$

$$(\dot{\varepsilon}_p, \dot{\alpha}_p) \in \partial \text{ind} K \quad (2.22)$$

*Equazioni  
costitutive del  
continuo*

dove

$$\begin{aligned} \partial \text{ind} K = \{(\sigma, \chi) : d_S(\tilde{\varepsilon}_p, \tilde{\alpha}_p) \geq d(\dot{\varepsilon}_p, \dot{\alpha}_p) + \\ + \sigma^T (\tilde{\varepsilon}_p - \dot{\varepsilon}_p) + \chi (\tilde{\alpha}_p - \dot{\alpha}_p), \\ \forall (\tilde{\varepsilon}_p, \tilde{\alpha}_p)\} \end{aligned} \quad (2.23)$$

Il secondo membro della (2.23) è la definizione dell'insieme del cono delle normali all'insieme convesso  $K$ , rappresentato in figura 2.4 e nel seguito denotato con  $N_K^{(\sigma, \chi)}$ . La (2.22), che rappresenta la legge di flusso associato che governa l'evoluzione delle variabili cinematiche inelastiche, diviene:

$$(\dot{\varepsilon}_p, \dot{\alpha}_p) \in N_K^{(\sigma, \chi)}$$

*Legge di flusso o di  
normalità del  
continuo*

e viene perciò detta legge di normalità. D'altra parte risulta (vedi [12])

$$\partial \text{ind} K = \dot{\lambda} \partial g(\sigma, \chi)$$

dove  $\dot{\lambda} \geq 0$  tale che

$$\dot{\lambda} = 0 \quad \text{se} \quad g(\sigma, \chi) < 0$$

$$\dot{\lambda} > 0 \quad \text{se} \quad g(\sigma, \chi) = 0.$$

Condizioni di  
Kuhn-Tucker del  
continuo

Le relazioni precedenti sono equivalenti alle condizioni di Kuhn-Tucker:

$$\dot{\lambda} \geq 0 \quad g(\sigma, \chi) \leq 0 \quad \dot{\lambda}g(\sigma, \chi) = 0.$$

### Comportamento irreversibile del continuo in termini di velocità

Si assume che le velocità di tensione e le velocità di variabili statiche interne possano essere derivate da una funzione di dissipazione tangente

Funzione di  
dissipazione  
tangente del  
continuo

$$d_t(\dot{\varepsilon}_p, \dot{\alpha}_p) = \text{supp}T_K^{(\sigma, \chi)} \quad (2.24)$$

che risulta essere la funzione supporto dell'insieme  $T_K^{(\sigma, \chi)}$ :

$$T_K^{(\sigma, \chi)} = \{(\dot{\sigma}, \dot{\chi}) : \dot{g}(\sigma, \dot{\sigma}, \chi, \dot{\chi}) \leq 0, g(\sigma, \chi) = 0\} \quad (2.25)$$

avendo definito

$$\dot{g}(\sigma, \dot{\sigma}, \chi, \dot{\chi}) = \left(\frac{\partial g}{\partial \sigma}\right)^T \dot{\sigma} + \left(\frac{\partial g}{\partial \chi}\right)^T \dot{\chi}. \quad (2.26)$$

Il legame diretto in termini di velocità assume la forma:

$$(\dot{\sigma}, \dot{\chi}) \in \partial d_t(\dot{\varepsilon}_p, \dot{\alpha}_p). \quad (2.27)$$

Legame diretto in  
termini di velocità  
del continuo

Dualmente le velocità di deformazione plastica e delle variabili cinematiche interne vengono derivate da una funzione di dissipazione complementare tangente, ottenuta dalla funzione di dissipazione tangente (2.24) attraverso la trasformata di Legendre:

Funzione di  
dissipazione  
complementare  
tangente del  
continuo

$$d'_t(\dot{\sigma}, \dot{\chi}) = \text{ind}T_K^{(\sigma, \chi)}. \quad (2.28)$$

Il legame inverso in termini di velocità è espresso dalla cosiddette leggi di flusso

Legame inverso in  
termini di velocità  
del continuo

$$(\dot{\varepsilon}_p, \dot{\alpha}_p) \in \partial d'_t(\dot{\sigma}, \dot{\chi}) \quad (2.29)$$

dove il sottogradiente del potenziale di dissipazione complementare tangente  $\partial d'_t$  risulta uguale al cono delle normali  $N_{T_K}$  all'insieme convesso  $T_K$  definito dalla (2.25).

Nel caso in cui  $g(\sigma, \chi)$  risulti differenziabile in ogni punto della frontiera dell'insieme degli stati ammissibili  $K$ , la funzione indicatrice che compare nella (2.28) risulta

$$\partial \text{ind} T_K^{(\sigma, \chi)} = \begin{cases} \dot{\lambda} \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{g}(\dot{\sigma}, \dot{\chi})}{\partial \dot{\sigma}} \\ \frac{\partial \dot{g}(\dot{\sigma}, \dot{\chi})}{\partial \dot{\chi}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} & \text{se } g(\sigma, \chi) = 0 \\ \mathbf{0} & \text{se } g(\sigma, \chi) < 0 \end{cases} \quad (2.30)$$

Le relazioni (2.30) dettano le condizioni di Kuhn-Tucker:

$$\dot{\lambda} \geq 0 \quad \dot{g}(\sigma, \dot{\sigma}, \chi, \dot{\chi}) \leq 0 \quad \dot{\lambda} \dot{g}(\sigma, \dot{\sigma}, \chi, \dot{\chi}) = 0 \quad g(\sigma, \chi) = 0.$$

*Condizioni di  
Kuhn-Tucker del  
continuo*

Inoltre dalla (2.26) risulta

$$\frac{\partial \dot{g}(\dot{\sigma}, \dot{\chi})}{\partial \dot{\sigma}} = \frac{\partial g(\sigma, \chi)}{\partial \sigma} \quad (2.31a)$$

$$\frac{\partial \dot{g}(\dot{\sigma}, \dot{\chi})}{\partial \dot{\chi}} = \frac{\partial g(\sigma, \chi)}{\partial \chi}. \quad (2.31b)$$

Sostituendo tali espressioni nelle (2.29) per le leggi di flusso si ottengono le note espressioni:

$$\dot{\varepsilon}_p = \dot{\lambda} \frac{\partial g(\sigma, \chi)}{\partial \sigma} \quad (2.32a)$$

$$\dot{\alpha}_p = \dot{\lambda} \frac{\partial g(\sigma, \chi)}{\partial \chi} \quad (2.32b)$$

*Leggi di flusso del  
continuo*

Per calcolare il parametro  $\dot{\lambda}$  che compare nelle leggi di flusso (2.29) (ovvero (2.32)) si utilizza la condizione di consistenza

$$\dot{g}(\sigma, \dot{\sigma}, \chi, \dot{\chi}) = 0 \Rightarrow \left( \frac{\partial g}{\partial \sigma} \right)^T \dot{\sigma} + \left( \frac{\partial g}{\partial \chi} \right)^T \dot{\chi} = 0$$

dove  $\dot{\chi}$  è data dalla (2.14b). Inoltre tenendo conto della (2.6) la condizione di consistenza diventa

*Condizione di  
consistenza e calcolo  
di  $\dot{\lambda}$*

$$\left( \frac{\partial g}{\partial \sigma} \right)^T \dot{\sigma} - \dot{\lambda} \left( \frac{\partial g}{\partial \chi} \right)^T \frac{\partial^2 \pi}{\partial \alpha_e^2} \frac{\partial g}{\partial \chi} = 0$$

dalla quale si ottiene il valore di  $\dot{\lambda}$  cercato:

$$\dot{\lambda} = \underbrace{\left[ \left( \frac{\partial g}{\partial \chi} \right)^T \frac{\partial^2 \pi}{\partial \alpha_e^2} \frac{\partial g}{\partial \chi} \right]^{-1}}_{\mathcal{H}} \left( \frac{\partial g}{\partial \sigma} \right)^T \dot{\sigma}. \quad (2.33)$$

Nella (2.33), che esprime  $\dot{\lambda}$  in funzione di  $\dot{\sigma}$ , lo scalare  $\mathcal{H}$  è detto fun-

*Funzione di  
incrudimento del  
continuo*

zione di incrudimento.

Una relazione alternativa di  $\dot{\lambda}$ , espresso in funzione della velocità di deformazione, può essere ricavata a partire dalla equazione di additività delle deformazioni, la quale, tenendo conto delle relazioni costitutive inverse, assume la forma

$$\dot{\sigma} = \mathbf{E} \left[ \dot{\varepsilon} - \dot{\lambda} \frac{\partial g}{\partial \sigma} \right]$$

Premoltiplicando ambo i membri per  $(\partial g / \partial \sigma)^T$  e risolvendo per  $\dot{\lambda}$  si ottiene:

$$\dot{\lambda} = \frac{\left( \frac{\partial g}{\partial \sigma} \right)^T \mathbf{E}}{\frac{1}{\mathcal{H}} + \left( \frac{\partial g}{\partial \sigma} \right)^T \mathbf{E} \frac{\partial g}{\partial \sigma}} \dot{\varepsilon}$$

Sostituendo si ottiene

$$\dot{\sigma} = \mathbf{E}_{ep} \dot{\varepsilon}$$

avendo definito la matrice elastoplastica

$$\mathbf{E}_{ep} = \mathbf{E} - \frac{\left( \mathbf{E} \frac{\partial g}{\partial \sigma} \right) \left( \mathbf{E} \frac{\partial g}{\partial \sigma} \right)^T}{\frac{1}{\mathcal{H}} + \left( \frac{\partial g}{\partial \sigma} \right)^T \mathbf{E} \frac{\partial g}{\partial \sigma}}. \quad (2.34)$$

Matrice  
elastoplastica del  
continuo

### 2.3.3 Comportamento reversibile dell'interfaccia

Analogamente a quanto assunto al paragrafo 2.3.1, la relazione costitutiva può essere dedotta dall'energia libera di Helmholtz  $F$ , somma di un potenziale elastico  $\varphi_S(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket_{Se})$  e di un potenziale di incrudimento  $\pi_S(\alpha_{Se})$  (che descrive il comportamento softening dell'interfaccia), dai quali è possibile derivare rispettivamente il vettore delle trazioni  $\mathbf{t}_S$  sull'interfaccia e le variabili interne  $\chi_S$ :

Legame diretto  
dell'interfaccia

$$\mathbf{t}_S = \frac{\partial \varphi_S(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket_{Se})}{\partial \llbracket \mathbf{u} \rrbracket_{Se}}$$

$$\chi_S = \frac{\partial \pi_S(\alpha_{Se})}{\partial \alpha_{Se}}$$

ovvero mediante i potenziali elastico  $\varphi'_S(\mathbf{t}_S)$  e di incrudimento  $\pi'_S(\chi_S)$  complementari, ricavati attraverso la Trasformata di Legendre, dai quali è possibile derivare  $\llbracket \mathbf{u} \rrbracket_{Se}$  e  $\alpha_{Se}$ :

Legame inverso  
dell'interfaccia

$$\begin{aligned} \llbracket \mathbf{u} \rrbracket_{S_e} &= \frac{\partial \varphi'_S(\mathbf{t}_S)}{\partial \mathbf{t}_S} \\ \alpha_{S_e} &= \frac{\partial \pi'_S(\chi_S)}{\partial \chi_S} \end{aligned}$$

Nel caso di elasticità lineare e incrudimento lineare, le espressioni del legame costitutivo diretto ed inverso dell'interfaccia divengono rispettivamente:

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_S &= \mathbf{E}_S \llbracket \mathbf{u} \rrbracket_{S_e}, \\ \chi_S &= \mathbf{H}_S \alpha_{S_e}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \llbracket \mathbf{u} \rrbracket_{S_e} &= \mathbf{E}_S^{-1} \mathbf{t}_S, \\ \alpha_{S_e} &= \mathbf{H}_S^{-1} \chi_S. \end{aligned}$$

*Caso lineare*

### Comportamento reversibile dell'interfaccia in termini di velocità

Anche in questo caso la velocità del vettore tensione all'interfaccia e la velocità della variabile statica interna sono derivate dai potenziali elastico e di incrudimento tangenti:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{t}}_S &= \frac{\partial \varphi_{St}(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket_{S_e}, \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket_{S_e})}{\partial \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket_{S_e}} \\ \dot{\chi}_S &= \frac{\partial \pi_{St}(\alpha_{S_e}, \dot{\alpha}_{S_e})}{\partial \dot{\alpha}_{S_e}} \end{aligned}$$

dove, nell'ipotesi che i potenziali risultino differenziabili due volte secondo Gateaux,

$$\begin{aligned} \varphi_{St}(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket_{S_e}, \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket_{S_e}) &= \frac{1}{2} \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket_{S_e}^T \frac{\partial^2 \varphi_S(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket_{S_e})}{\partial \llbracket \mathbf{u} \rrbracket_{S_e}^2} \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket_{S_e} \\ \pi_{St}(\alpha_{S_e}, \dot{\alpha}_{S_e}) &= \frac{1}{2} \dot{\alpha}_{S_e}^T \frac{\partial^2 \pi_{St}(\alpha_{S_e})}{\partial \alpha_{S_e}^2} \dot{\alpha}_{S_e} \end{aligned}$$

Sostituendo si ottengono le espressioni del legame diretto in termini di velocità:

$$\dot{\mathbf{t}}_S = \frac{\partial^2 \varphi_S(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket_{S_e})}{\partial \llbracket \mathbf{u} \rrbracket_{S_e}^2} \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket_{S_e} \quad (2.40a)$$

$$\dot{\chi}_S = \frac{\partial^2 \pi_{St}(\alpha_{S_e})}{\partial \alpha_{S_e}^2} \dot{\alpha}_{S_e} \quad (2.40b)$$

### 2.3.4 Comportamento irreversibile dell'interfaccia

La parte irreversibile del legame costitutivo è definita in modo analogo a quanto descritto nel paragrafo 2.3.2 per il continuo. Anche in questo caso si definiscono una funzione di dissipazione

*Funzione di dissipazione dell'interfaccia*

$$d_S(\llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket_{Sp}, \dot{\alpha}_{Sp}) = \sup_{\mathbf{t}_S, \chi_S} \left[ \mathbf{t}_S^T \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket_{Sp} + \chi_S^T \dot{\alpha}_{Sp} \right]$$

*Funzione di dissipazione complementare dell'interfaccia*

ed la sua complementare  $d'_S$ , attraverso la trasformata di Legendre,

$$d'_S(\mathbf{t}_S, \chi_S) = \sup_{\llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket_{Sp}, \dot{\alpha}_{Sp}} \left[ \mathbf{t}_S^T \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket_{Sp} + \chi_S^T \dot{\alpha}_{Sp} - d_S(\llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket_{Sp}, \dot{\alpha}_{Sp}) \right]$$

*Insieme degli stati ammissibili dell'interfaccia*

le quali risultano rispettivamente pari alla funzione supporto ed alla funzione indicatrice dell'insieme  $K_S$  degli stati ammissibili, definito:

$$K_S = \{(\mathbf{t}_S, \chi_S) : g_S(\mathbf{t}_S, \chi_S) \leq 0\}.$$

*Legame costitutivo dell'interfaccia*

dove  $g_S$  è detta funzione di attivazione dell'interfaccia. Il legame costitutivo così definito assume la forma:

$$(\mathbf{t}_S, \chi_S) \in \partial \text{supp} K_S \quad (2.41a)$$

$\Updownarrow$

$$(\llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket_{Sp}, \dot{\alpha}_{Sp}) \in \partial \text{ind} K_S = N_{K_S}^{(\mathbf{t}_S, \chi_S)}. \quad (2.41b)$$

Il secondo membro della (2.41b) è l'insieme del cono delle normali all'insieme convesso  $K_S$ . D'altra parte risulta

$$\partial \text{ind} K_S = \dot{\lambda}_S \partial g_S(\mathbf{t}_S, \chi_S)$$

dove  $\dot{\lambda}_S \geq 0$  tale che

$$\dot{\lambda}_S = 0 \quad \text{se} \quad g_S(\mathbf{t}_S, \chi_S) < 0$$

$$\dot{\lambda}_S > 0 \quad \text{se} \quad g_S(\mathbf{t}_S, \chi_S) = 0,$$

*Condizioni di Kuhn-Tucker dell'interfaccia*

relazioni equivalenti alle condizioni di Kuhn-Tucker:

$$\dot{\lambda}_S \geq 0 \quad g_S(\mathbf{t}_S, \chi_S) \leq 0 \quad \dot{\lambda}_S g_S(\mathbf{t}_S, \chi_S) = 0.$$

### Comportamento irreversibile dell'interfaccia in termini di velocità

Si assume che la velocità del vettore delle trazioni e delle variabili statiche interne possano essere derivate da una funzione di dissipazione tangente

$$d_{St}([\dot{\mathbf{u}}]_{Sp}, \dot{\alpha}_{Sp}) = \text{supp}T_{K_S}^{(\mathbf{t}_S, \chi_S)} \quad (2.42)$$

che risulta essere la funzione supporto dell'insieme  $T_{K_S}^{(\mathbf{t}_S, \chi_S)}$ :

$$T_{K_S}^{(\mathbf{t}_S, \chi_S)} = \{(\dot{\mathbf{t}}_S, \dot{\chi}_S) : \dot{g}_S(\dot{\mathbf{t}}_S, \dot{\chi}_S) \leq 0, g_S(\mathbf{t}_S, \chi_S) = 0\} \quad (2.43)$$

*Funzione di dissipazione tangente dell'interfaccia*

avendo definito

$$\dot{g}_S(\dot{\mathbf{t}}_S, \dot{\chi}_S) = \left(\frac{\partial g_S}{\partial \mathbf{t}_S}\right)^T \dot{\mathbf{t}}_S + \left(\frac{\partial g_S}{\partial \chi_S}\right)^T \dot{\chi}_S \quad (2.44)$$

Il legame diretto in termini di velocità assume la forma:

$$(\dot{\mathbf{t}}_S, \dot{\chi}_S) \in \partial d_{St}([\dot{\mathbf{u}}]_{Sp}, \dot{\alpha}_{Sp}). \quad (2.45)$$

*Legame diretto dell'interfaccia in termini di velocità*

Dualmente le velocità del salto plastico e delle variabili cinematiche interne vengono derivate da una funzione di dissipazione complementare tangente, ottenuto dal potenziale di dissipazione tangente (2.42) attraverso la trasformata di Legendre:

*Funzione di dissipazione complementare tangente dell'interfaccia*

$$d'_{St}(\mathbf{t}_S, \chi_S) = \text{ind}T_{K_S}^{(\mathbf{t}_S, \chi_S)}. \quad (2.46)$$

Il legame inverso in termini di velocità è espresso dalla cosiddette leggi di flusso

$$([\dot{\mathbf{u}}]_{Sp}, \dot{\alpha}_{Sp}) \in \partial d'_{St}(\mathbf{t}_S, \chi_S)$$

*Legame inverso dell'interfaccia in termini di velocità*

dove il sottogradient del potenziale di dissipazione complementare tangente  $\partial d'_{St}$  risulta uguale al cono delle normali  $N_{T_{K_S}}$  all'insieme convesso  $T_{K_S}$  definito dalla (2.43).

Nel caso in cui  $g_S(\mathbf{t}_S, \chi_S)$  risulti differenziabile in ogni punto della frontiera dell'insieme degli stati ammissibili  $K_S$ , la funzione indicatrice che compare nella (2.46) risulta

$$\partial \text{ind}T_{K_S}^{(\mathbf{t}_S, \chi_S)} = \begin{cases} \dot{\lambda}_S \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{g}_S(\mathbf{t}_S, \dot{\mathbf{t}}_S, \chi_S, \dot{\chi}_S)}{\partial \dot{\mathbf{t}}_S} \\ \frac{\partial \dot{g}_S(\mathbf{t}_S, \dot{\mathbf{t}}_S, \chi_S, \dot{\chi}_S)}{\partial \dot{\chi}_S} \end{bmatrix} & \text{se } g_S(\mathbf{t}_S, \chi_S) = 0 \\ \mathbf{0} & \text{se } g_S(\mathbf{t}_S, \chi_S) < 0 \end{cases} \quad (2.47)$$

Le relazioni (2.47) dettano le condizioni di Kuhn-Tucker:

*Condizioni di Kuhn-Tucker dell'interfaccia*

$$\dot{\lambda}_S \geq 0 \quad \dot{g}_S(\dot{\mathbf{t}}_S, \dot{\chi}_S) \leq 0 \quad \dot{\lambda}_S \dot{g}_S(\dot{\mathbf{t}}_S, \dot{\chi}_S) = 0 \quad g_S(\mathbf{t}_S, \chi_S) = 0.$$

Inoltre dalla (2.44) risulta

$$\frac{\partial \dot{g}_S(\dot{\mathbf{t}}_S, \dot{\chi}_S)}{\partial \dot{\mathbf{t}}_S} = \frac{\partial g_S(\mathbf{t}_S, \chi_S)}{\partial \mathbf{t}_S} \quad (2.48a)$$

$$\frac{\partial \dot{g}_S(\dot{\mathbf{t}}_S, \dot{\chi}_S)}{\partial \dot{\chi}_S} = \frac{\partial g_S(\mathbf{t}_S, \chi_S)}{\partial \chi_S}. \quad (2.48b)$$

*Leggi di flusso  
dell'interfaccia*

Le leggi di flusso assumono la nota espressione:

$$\llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket_{Sp} = \dot{\lambda}_S \frac{\partial g_S(\mathbf{t}_S, \chi_S)}{\partial \mathbf{t}_S} \quad (2.49a)$$

$$\dot{\alpha}_{Sp} = \dot{\lambda}_S \frac{\partial g_S(\mathbf{t}_S, \chi_S)}{\partial \chi_S} \quad (2.49b)$$

*Condizione di  
consistenza e calcolo  
di  $\dot{\lambda}_S$*

Per calcolare il parametro  $\dot{\lambda}_S$  che compare nelle leggi di flusso (2.49) si utilizza la condizione di consistenza

$$\dot{g}_S(\mathbf{t}_S, \dot{\mathbf{t}}_S, \chi_S, \dot{\chi}_S) = 0 \implies \left( \frac{\partial g_S}{\partial \mathbf{t}_S} \right)^T \dot{\mathbf{t}}_S + \left( \frac{\partial g_S}{\partial \chi_S} \right)^T \dot{\chi}_S = 0$$

dove  $\dot{\chi}_S$  è data dalla (2.40b). Inoltre tenendo conto della (2.8) la condizione di consistenza diventa

$$\left( \frac{\partial g_S}{\partial \mathbf{t}_S} \right)^T \dot{\mathbf{t}}_S - \dot{\lambda}_S \left( \frac{\partial g_S}{\partial \chi_S} \right)^T \frac{\partial^2 \pi_S}{\partial \alpha_{Se}^2} \left( \frac{\partial g_S}{\partial \chi_S} \right) = 0$$

dalla quale si ottiene il valore di  $\dot{\lambda}_S$  cercato:

$$\dot{\lambda}_S = \underbrace{\left[ \left( \frac{\partial g_S}{\partial \chi_S} \right)^T \frac{\partial^2 \pi_S}{\partial \alpha_{Se}^2} \left( \frac{\partial g_S}{\partial \chi_S} \right) \right]^{-1}}_{\mathcal{H}_S} \left( \frac{\partial g_S}{\partial \mathbf{t}_S} \right)^T \dot{\mathbf{t}}_S. \quad (2.50)$$

*Funzione di  
incrudimento  
dell'interfaccia*

Nella (2.50), che esprime  $\dot{\lambda}_S$  in funzione di  $\dot{\mathbf{t}}_S$ , lo scalare  $\mathcal{H}_S$  è la funzione di incrudimento dell'interfaccia.

Una relazione alternativa di  $\dot{\lambda}_S$ , espresso in funzione della velocità del salto, può essere ricavata a partire dalla equazione di additività del salto, la quale, tenendo conto delle relazioni costitutive inverse dell'interfaccia, assume la forma

$$\dot{\mathbf{t}}_S = \mathbf{E}_S \left[ \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket_S - \dot{\lambda}_S \frac{\partial g_S}{\partial \mathbf{t}_S} \right]$$



Premoltiplicando ambo i membri per  $\left(\frac{\partial g_S}{\partial \mathbf{t}_S}\right)^T$  e risolvendo per  $\dot{\lambda}_S$  si ottiene:

$$\dot{\lambda}_S = \frac{\left(\frac{\partial g_S}{\partial \mathbf{t}_S}\right)^T \mathbf{E}_S}{\frac{1}{\mathcal{H}_S} + \left(\frac{\partial g_S}{\partial \mathbf{t}_S}\right)^T \mathbf{E}_S \frac{\partial g_S}{\partial \mathbf{t}_S}} \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket_S$$

Sostituendo si ottiene

$$\dot{\mathbf{t}}_S = \mathbf{E}_{S,ep} \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket_S$$

avendo definito la matrice elastoplastica

$$\mathbf{E}_{S,ep} = \mathbf{E}_S - \frac{\left(\mathbf{E}_S \frac{\partial g_S}{\partial \mathbf{t}_S}\right) \left(\mathbf{E}_S \frac{\partial g_S}{\partial \mathbf{t}_S}\right)^T}{\frac{1}{\mathcal{H}_S} + \left(\frac{\partial g_S}{\partial \mathbf{t}_S}\right)^T \mathbf{E}_S \frac{\partial g_S}{\partial \mathbf{t}_S}} \quad (2.51)$$

*Matrice elastoplastica della interfaccia*

## 2.4 Formulazione variazionale

Le equazioni che governano il problema sono ricavate per via variazionale, imponendo le condizioni di stazionarietà del funzionale energetico multiscala misto di Hu-Washizu generalizzato tangente:

$$\Pi_t^{HW} \left( \dot{\mathbf{u}}, \dot{\sigma}, \dot{\chi}, \dot{\mathbf{t}}_S, \dot{\chi}_S, \dot{\mathbf{r}}, \dot{\varepsilon}_e, \dot{\varepsilon}_p, \dot{\alpha}_e, \dot{\alpha}_p, \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket_{S_e}, \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket_{S_p}, \dot{\alpha}_{S_e}, \dot{\alpha}_{S_p} \right)$$

*Funzionale di Hu-Washizu generalizzato tangente*

Il funzionale è costruito a partire dai vincoli (o condizioni) cinematici che si vogliono imporre al problema [64]. Nel caso in esame le condizioni dettate dalla cinematica descritta al paragrafo 2.2 sono:

*Vincoli cinematici da imporre*

- compatibilità cinematica interna nel continuo (2.3):

$$\mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} - \dot{\varepsilon}_e - \dot{\varepsilon}_p = 0 \quad \text{in} \quad \Omega - \Omega_\varphi \quad (2.52a)$$

$$\mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} - \dot{\varepsilon}_e - \dot{\varepsilon}_p = 0 \quad \text{in} \quad \Omega_\varphi - S \quad (2.52b)$$

nella quale si è assunta implicitamente l'additività delle deformazioni (2.5),

- additività delle variabili cinematiche interne nel continuo (2.6):

$$\underbrace{\dot{\alpha}}_{=0} - \dot{\alpha}_e - \dot{\alpha}_p = 0 \quad (2.53)$$

- compatibilità cinematica sulla frontiera vincolata:

$$\dot{\mathbf{u}} - \dot{\bar{\mathbf{u}}} = \mathbf{0} \quad \text{on} \quad \partial(\Omega - \Omega_\varphi)_u \quad (2.54a)$$

$$\dot{\mathbf{u}} - \dot{\bar{\mathbf{u}}} = \mathbf{0} \quad \text{on} \quad \partial(\Omega_\varphi - S)_u \quad (2.54b)$$

- compatibilità cinematica sull'interfaccia (2.4):

$$[[\dot{\mathbf{u}}]] - [[\dot{\mathbf{u}}]]_{S_e} - [[\dot{\mathbf{u}}]]_{S_p} = \mathbf{0} \quad (2.55)$$

nella quale si è assunta implicitamente l'additività del salto nel campo di spostamento in corrispondenza dell'interfaccia (2.7),

- additività delle variabili cinematiche interne sull'interfaccia (2.8):

$$\underbrace{\dot{\alpha}_S}_{=0} - \dot{\alpha}_{S_e} - \dot{\alpha}_{S_p} = 0 \quad (2.56)$$

*Costruzione del  
funzionale di  
Hu-Washizu  
generalizzato  
tangente*

Il generico addendo del funzionale di Hu-Washizu generalizzato tangente si costruisce moltiplicando il generico vincolo nella forma  $f(x) = 0$  per la variabile duale, che rappresenta il moltiplicatore lagrangiano del vincolo. Inoltre compaiono i termini relativi ai potenziali elastici e di incrudimento, e alle funzioni di dissipazione che definiscono i modelli costitutivi del continuo e dell'interfaccia, descritte al paragrafo 2.3, ed i termini relativi al lavoro esterno:

$$\begin{aligned}
\Pi_t^{HW} = & \int_{\Omega-\Omega_\varphi} (\varphi_t(\dot{\varepsilon}_e) + \pi_t(\dot{\alpha}_e)) d\Omega + \int_{\Omega_\varphi-S} (\varphi_t(\dot{\varepsilon}_e) + \pi_t(\dot{\alpha}_e)) d\Omega + \\
& + \int_S (\varphi_{S,t}(\llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket_{S_e}) + \pi_{S,t}(\dot{\alpha}_{S_e})) dS + \\
& + \int_{\Omega-\Omega_\varphi} d_t(\dot{\varepsilon}_p, \dot{\alpha}_p) d\Omega + \int_{\Omega_\varphi-S} d_t(\dot{\varepsilon}_p, \dot{\alpha}_p) d\Omega + \int_S d_{S,t}(\llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket_{S_p}, \dot{\alpha}_{S_p}) dS + \\
& + \int_{\Omega-\Omega_\varphi} \dot{\sigma}^T(\mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} - \dot{\varepsilon}_e - \dot{\varepsilon}_p) d\Omega + \int_{\Omega_\varphi-S} \dot{\sigma}^T(\mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} - \dot{\varepsilon}_e - \dot{\varepsilon}_p) d\Omega + \\
& + \int_S \dot{\mathbf{t}}_S^T(\llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket - \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket_{S_e} - \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket_{S_p}) dS + \int_{\Omega-\Omega_\varphi} \dot{\chi}^T(\dot{\alpha} - \dot{\alpha}_e - \dot{\alpha}_p) dS + \\
& + \int_{\Omega_\varphi-S} \dot{\chi}^T(\dot{\alpha} - \dot{\alpha}_e - \dot{\alpha}_p) dS + \int_S \dot{\chi}_S^T(\dot{\alpha}_S - \dot{\alpha}_{S_e} - \dot{\alpha}_{S_p}) dS - \\
& - \int_{\Omega-\Omega_\varphi} \dot{\mathbf{b}}^T \dot{\mathbf{u}} d\Omega - \int_{\Omega_\varphi-S} \dot{\mathbf{b}}^T (\dot{\mathbf{u}} + \dot{\mathbf{u}}) d\Omega - \int_{\partial(\Omega-\Omega_\varphi)_q} \dot{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{u}} dS - \\
& - \int_{\partial(\Omega_\varphi-S)_q} \dot{\mathbf{q}}^T (\dot{\mathbf{u}} + \dot{\mathbf{u}}) dS - \int_{\partial(\Omega-\Omega_\varphi)_u} \dot{\mathbf{r}}^T (\dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{u}}) dS - \\
& - \int_{\partial(\Omega_\varphi-S)_u} \dot{\mathbf{r}}^T (\dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{u}}) dS
\end{aligned} \tag{2.57}$$

Imponendo le condizioni di stazionarietà del funzionale (2.57) si ottengono le equazioni che governano il problema. In particolare:

- imponendo la stazionarietà di  $\Pi_t^{HW}$  rispetto a  $\dot{\sigma}$  si ottengono le equazioni (2.52) di compatibilità cinematica interna nel continuo,
- imponendo la stazionarietà di  $\Pi_t^{HW}$  rispetto a  $\dot{\chi}$  si ottiene la relazione (2.53) di additività della variabile interna che descrive il comportamento incrudente del continuo,
- imponendo la stazionarietà di  $\Pi_t^{HW}$  rispetto a  $\dot{\mathbf{r}}$  si ottengono le equazioni (2.54) di compatibilità cinematica sulla frontiera vincolata,

*Condizioni di stazionarietà ed equazioni del problema*

- imponendo la stazionarietà di  $\Pi_t^{HW}$  rispetto a  $\dot{\mathbf{t}}_S$  si ottiene la relazione (2.55) di compatibilità cinematica dell'interfaccia,
- imponendo la stazionarietà di  $\Pi_t^{HW}$  rispetto a  $\dot{\chi}_S$  si ottiene la relazione (2.56) di additività della variabile interna che descrive il comportamento softening dell'interfaccia,
- imponendo la stazionarietà di  $\Pi_t^{HW}$  rispetto a  $(\dot{\varepsilon}_e, \dot{\alpha}_e)$  si ottengono le equazioni (2.13) che descrivono la parte reversibile del legame costitutivo del continuo,
- imponendo la stazionarietà di  $\Pi_t^{HW}$  rispetto a  $(\dot{\varepsilon}_p, \dot{\alpha}_p)$  si ottiene l'equazione (2.27) che descrive la parte irreversibile del legame costitutivo del continuo,
- imponendo la stazionarietà di  $\Pi_t^{HW}$  rispetto a  $(\llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket_{S_e}, \dot{\alpha}_{S_e})$  si ottengono le equazioni costitutive (2.39), che descrivono il comportamento reversibile dell'interfaccia,
- imponendo la stazionarietà di  $\Pi_t^{HW}$  rispetto a  $(\llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket_{S_p}, \dot{\alpha}_{S_p})$  si ottiene l'equazione costitutiva (2.45) che descrive il comportamento irreversibile dell'interfaccia,
- imponendo la stazionarietà di  $\Pi_t^{HW}$  rispetto a  $\dot{\mathbf{u}}$  si ottengono le equazioni di equilibrio nel continuo e sulla frontiera:

$$\begin{aligned} -\mathbf{C}^T \dot{\sigma} &= \dot{\mathbf{b}} & \text{in} & \Omega - S \\ \mathcal{N} \dot{\sigma} &= \dot{\mathbf{q}} & \text{su} & \partial(\Omega - S)_q \\ \mathcal{N} \dot{\sigma} &= \dot{\mathbf{r}} & \text{su} & \partial(\Omega - S)_u \end{aligned} \quad (2.58)$$

- imponendo la stazionarietà di  $\Pi_t^{HW}$  rispetto a  $\dot{\mathbf{u}}$  si riottengono le equazioni di equilibrio nel continuo e sulla frontiera (2.58); si ottiene inoltre l'equazione di equilibrio sull'interfaccia:

$$\mathcal{N} \dot{\sigma} = \dot{\mathbf{t}}_S. \quad (2.59)$$

Il soddisfacimento delle equazioni appena ricavate corrisponde alla ottimizzazione del funzionale (2.57), il quale risulta convesso in  $(\dot{\varepsilon}_e, \dot{\varepsilon}_p, \dot{\alpha}_e, \dot{\alpha}_p, \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket_{S_e}, \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket_{S_p}, \dot{\alpha}_{S_e}, \dot{\alpha}_{S_p})$  e lineare in  $(\dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{u}})$ , in  $(\dot{\sigma}, \dot{\chi}, \dot{\mathbf{t}}_S, \dot{\chi}_S)$  ed in  $\dot{\mathbf{r}}$ . Tale problema di ottimizzazione si pone nella forma:

Problema di  
ottimizzazione

$$\underset{(\dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{u}})(\dot{\sigma}, \dot{\chi}, \dot{\mathbf{t}}_S, \dot{\chi}_S) \dot{\mathbf{r}}}{\text{stat stat stat}} \inf_{(\dot{\varepsilon}_e, \dot{\varepsilon}_p, \dot{\alpha}_e, \dot{\alpha}_p, \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket_{S_e}, \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket_{S_p}, \dot{\alpha}_{S_e}, \dot{\alpha}_{S_p})} \Pi_t^{HW}$$

### 2.4.1 Funzionale di Hellinger-Reissner

Si vuole pervenire ad una forma del problema di ottimizzazione nella quale compaia un funzionale che dipenda dalle sole variabili statiche e dai campi di spostamento

*Problema di  
ottimizzazione*

$$\text{stat}_{(\dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{u}})} \sup_{(\dot{\sigma}, \dot{\chi}, \dot{\mathbf{t}}_S, \dot{\chi}_S)} \text{stat}_{\dot{\mathbf{r}}} \Pi_t^{HR} \left( \dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{u}}, \dot{\sigma}, \dot{\chi}, \dot{\mathbf{t}}_S, \dot{\chi}_S, \dot{\mathbf{r}} \right) \quad (2.60)$$

dove  $\Pi_t^{HR}$  è il funzionale di Hellinger-Reissner generalizzato, che può essere ottenuto dal funzionale di Hu-Washizu (2.57) eliminando le variabili  $\dot{\varepsilon}_e, \dot{\varepsilon}_p, \dot{\alpha}_e, \dot{\alpha}_p, \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket_{S_e}, \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket_{S_p}, \dot{\alpha}_{S_e}, \dot{\alpha}_{S_p}$ :

$$\Pi_t^{HR} = \inf_{(\dot{\varepsilon}_e, \dot{\varepsilon}_p, \dot{\alpha}_e, \dot{\alpha}_p, \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket_{S_e}, \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket_{S_p}, \dot{\alpha}_{S_e}, \dot{\alpha}_{S_p})} \Pi_t^{HW}$$

Ricordando le relazioni per il continuo e per l'interfaccia, che esprimono il potenziali elastico e di incrudimento complementari in funzione dei rispettivi potenziali complementari, e le relazioni che legano la dissipazione complementare e la dissipazione, si ottiene:

*Funzionale di  
Hellinger-Reissner  
tangente*

$$\begin{aligned} \Pi_t^{HR} = & - \int_{\Omega - \Omega_\varphi} (\varphi'_t(\dot{\sigma}) + \pi'_t(\dot{\chi})) d\Omega - \int_{\Omega_\varphi - S} (\varphi'_t(\dot{\sigma}) + \pi'_t(\dot{\chi})) d\Omega - \\ & - \int_S (\varphi'_{S,t}(\dot{\mathbf{t}}_S) + \pi'_{S,t}(\dot{\chi}_S)) dS - \\ & - \int_{\Omega - \Omega_\varphi} d'_t(\dot{\sigma}, \dot{\chi}) d\Omega - \int_{\Omega_\varphi - S} d'_t(\dot{\sigma}, \dot{\chi}) d\Omega - \int_S d'_{S,t}(\dot{\mathbf{t}}_S, \dot{\chi}_S) dS + \\ & + \int_{\Omega - \Omega_\varphi} \dot{\sigma}^T \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}} d\Omega + \int_{\Omega_\varphi - S} \dot{\sigma}^T (\mathbf{C} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}}) d\Omega + \int_S \dot{\mathbf{t}}_S^T \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket dS - \\ & - \int_{\Omega - \Omega_\varphi} \dot{\mathbf{b}}^T \dot{\mathbf{u}} d\Omega - \int_{\Omega_\varphi - S} \dot{\mathbf{b}}^T (\dot{\mathbf{u}} + \dot{\mathbf{u}}) d\Omega - \int_{\partial(\Omega - \Omega_\varphi)_q} \dot{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{u}} d\Omega - \\ & - \int_{\partial(\Omega_\varphi - S)_q} \dot{\mathbf{q}}^T (\dot{\mathbf{u}} + \dot{\mathbf{u}}) d\Omega - \int_{\partial(\Omega - \Omega_\varphi)_u} \dot{\mathbf{r}}^T (\dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{u}}) d\Omega - \\ & - \int_{\partial(\Omega_\varphi - S)_u} \dot{\mathbf{r}}^T (\dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{u}}) d\Omega \end{aligned} \quad (2.61)$$

Condizioni di  
stazionarietà di  
 $\Pi_t^{HR}$  ed equazioni  
del problema

Imponendo le condizioni di stazionarietà del funzionale (2.61) si ottengono le equazioni che governano il problema. In particolare:

- imponendo la stazionarietà di  $\Pi^{HR}$  rispetto a  $(\dot{\sigma}, \dot{\chi})$  si ottengono le equazioni costitutive del continuo (2.11):

$$\begin{aligned} \left( \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} - \frac{\partial \varphi'_t}{\partial \dot{\sigma}}, -\frac{\partial \pi'_t}{\partial \dot{\chi}} \right) &\in \partial d'_t(\dot{\sigma}, \dot{\chi}) \quad \text{in } \Omega - \Omega_\varphi \\ \left( \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} - \frac{\partial \varphi'_t}{\partial \dot{\sigma}}, -\frac{\partial \pi'_t}{\partial \dot{\chi}} \right) &\in \partial d'_t(\dot{\sigma}, \dot{\chi}) \quad \text{in } \Omega_\varphi - S \end{aligned}$$

nella quale si è implicitamente imposta la relazione di compatibilità cinematica interna nel continuo (2.52) e la relazione di additività della variabile interna,

- imponendo la stazionarietà di  $\Pi^{HW}$  rispetto a  $(\dot{\mathbf{t}}_S, \dot{\chi}_S)$  si ottengono le equazioni costitutive che descrivono il comportamento dell'interfaccia:

$$\left( \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket - \frac{\partial \varphi'_{S,t}}{\partial \dot{\mathbf{t}}_S}, -\frac{\partial \pi'_{S,t}}{\partial \dot{\chi}_S} \right) \in \partial d'_{S,t}(\dot{\mathbf{t}}_S, \dot{\chi}_S)$$

nelle quali si sono implicitamente imposte la relazione di additività della variabile interna (2.6) che descrive il comportamento softening dell'interfaccia e la relazione di compatibilità cinematica sull'interfaccia (2.55),

- imponendo la stazionarietà di  $\Pi^{HW}$  rispetto a  $\dot{\mathbf{r}}$  si ottengono le equazioni (2.54) di compatibilità cinematica sulla frontiera vincolata,
- imponendo la stazionarietà di  $\Pi^{HW}$  rispetto a  $\dot{\mathbf{u}}$  si ottengono le equazioni di equilibrio nel continuo e sulla frontiera (2.58):
- imponendo la stazionarietà di  $\Pi^{HW}$  rispetto a  $\dot{\mathbf{u}}$  si riottengono le equazioni di equilibrio nel continuo e sulla frontiera (2.58); si ottiene inoltre l'equazione di equilibrio sull'interfaccia (2.59)

## 2.4.2 Regolarizzazione

Il funzionale di Hellinger-Reissner, definito dalla (2.61), non risulta differenziabile per la presenza della funzione indicatrice degli insiemi  $T_K$  e  $T_{K_S}$  degli stati tensionali ammissibili rispettivamente del continuo e dell'interfaccia. Al fine di rendere differenziabile il funzionale si adotta una regolarizzazione di tipo Lagrangian [17, 13]:

Regolarizzazione di  
tipo Lagrangian

$$\text{ind}T_K = \sup_{\dot{\lambda} \geq 0} [\dot{\lambda} \dot{g}(\dot{\sigma}, \dot{\chi})]$$

$$\text{ind}T_{K_S} = \sup_{\dot{\lambda}_S \geq 0} [\dot{\lambda}_S \dot{g}_S(\dot{\mathbf{t}}_S, \dot{\chi}_S)]$$

nelle quali  $\dot{\lambda}$  e  $\dot{\lambda}_S$  sono due moltiplicatori plastici lagrangiani non negativi. Il problema di ottimizzazione assume pertanto l'espressione regolarizzata

$$\text{stat}_{(\dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{u}})} \sup_{(\dot{\sigma}, \dot{\chi}, \dot{\mathbf{t}}_S, \dot{\chi}_S)} \text{stat inf}_{\dot{\mathbf{r}} \quad \dot{\lambda}, \dot{\lambda}_S} \Pi_t^{HR} \left( \dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{u}}, \dot{\sigma}, \dot{\chi}, \dot{\mathbf{t}}_S, \dot{\chi}_S, \dot{\lambda}, \dot{\lambda}_S, \dot{\mathbf{r}} \right) \quad (2.63)$$

dove

$$\begin{aligned} \Pi_t^{HR} = & - \int_{\Omega - \Omega_\varphi} (\varphi'_t(\dot{\sigma}) + \pi'_t(\dot{\chi})) d\Omega - \int_{\Omega_\varphi - S} (\varphi'_t(\dot{\sigma}) + \pi'_t(\dot{\chi})) d\Omega - \\ & - \int_S (\varphi'_{S,t}(\dot{\mathbf{t}}_S) + \pi'_{S,t}(\dot{\chi}_S)) dS - \\ & - \int_{\Omega - \Omega_\varphi} \dot{\lambda} \dot{g}(\dot{\sigma}, \dot{\chi}) d\Omega - \int_{\Omega_\varphi - S} \dot{\lambda} \dot{g}(\dot{\sigma}, \dot{\chi}) d\Omega - \int_S \dot{\lambda}_S \dot{g}_S(\dot{\mathbf{t}}_S, \dot{\chi}_S) dS + \\ & + \int_{\Omega - \Omega_\varphi} \dot{\sigma}^T \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}} d\Omega + \int_{\Omega_\varphi - S} \dot{\sigma}^T (\mathbf{C} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}}) d\Omega + \int_S \dot{\mathbf{t}}_S^T [\dot{\mathbf{u}}] dS - \\ & - \int_{\Omega - \Omega_\varphi} \dot{\mathbf{b}}^T \dot{\mathbf{u}} d\Omega - \int_{\Omega_\varphi - S} \dot{\mathbf{b}}^T (\dot{\mathbf{u}} + \dot{\mathbf{u}}) d\Omega - \int_{\partial(\Omega - \Omega_\varphi)_q} \dot{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{u}} d\Omega - \\ & - \int_{\partial(\Omega_\varphi - S)_q} \dot{\mathbf{q}}^T (\dot{\mathbf{u}} + \dot{\mathbf{u}}) d\Omega - \int_{\partial(\Omega - \Omega_\varphi)_u} \dot{\mathbf{r}}^T (\dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{u}}) d\Omega - \\ & - \int_{\partial(\Omega_\varphi - S)_u} \dot{\mathbf{r}}^T (\dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{u}}) d\Omega \end{aligned} \quad (2.64)$$

Imponendo le condizioni di stazionarietà del funzionale regolarizzato (2.64), si ottiene la forma regolarizzata delle equazioni che governano il problema, nel seguito riportate nell'ipotesi di legame elastico lineare e di incrudimento lineare sia del continuo che dell'interfaccia:

- equazioni costitutive del continuo intero  $\Omega - \Omega_\varphi$ , avendo ricordato le relazioni (2.31):

Problema di  
ottimizzazione  
regolarizzato

Funzionale di  
Hellinger-Reissner  
tangente  
regolarizzato

Forma regolarizzata  
delle equazioni del  
problema

Equazioni  
costitutive

$$\mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{E}^{-1}\dot{\sigma} + \dot{\lambda} \frac{\partial g(\sigma, \chi)}{\partial \sigma} \quad (2.65a)$$

$$\mathbf{H}^{-1}\dot{\chi} + \dot{\lambda} \frac{\partial g(\sigma, \chi)}{\partial \chi} = 0 \quad (2.65b)$$

$$\dot{g}(\dot{\sigma}, \dot{\chi}) = 0 \quad (2.65c)$$

- equazioni costitutive del continuo attraversato  $\Omega_\varphi - S$ :

$$\mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{E}^{-1}\dot{\sigma} + \dot{\lambda} \frac{\partial g(\sigma, \chi)}{\partial \sigma} \quad (2.66a)$$

$$\mathbf{H}^{-1}\dot{\chi} + \dot{\lambda} \frac{\partial g(\sigma, \chi)}{\partial \chi} = 0 \quad (2.66b)$$

$$\dot{g}(\dot{\sigma}, \dot{\chi}) = 0 \quad (2.66c)$$

- equazioni costitutive dell'interfaccia  $S$ , avendo ricordato le relazioni (2.48):

$$[[\dot{\mathbf{u}}]] = \mathbf{E}_S^{-1}\dot{\mathbf{t}}_S + \dot{\lambda}_S \frac{\partial g_S(\mathbf{t}_S, \chi_S)}{\partial \mathbf{t}_S} \quad (2.67a)$$

$$\mathbf{H}_S^{-1}\dot{\chi}_S + \dot{\lambda}_S \frac{\partial g_S(\mathbf{t}_S, \chi_S)}{\partial \chi_S} = 0 \quad (2.67b)$$

$$\dot{g}_S(\dot{\mathbf{t}}_S, \dot{\chi}_S) = 0 \quad (2.67c)$$

Equazioni di equilibrio

- equazioni di equilibrio del continuo (integro ed attraversato), sulla parte di frontiera caricata e sulla parte vincolata:

$$\begin{aligned} -\mathbf{C}^T \dot{\sigma} &= \dot{\mathbf{b}} & \text{in} & \Omega - S \\ \mathcal{N} \dot{\sigma} &= \dot{\mathbf{q}} & \text{su} & \partial(\Omega - S)_q \\ \mathcal{N} \dot{\sigma} &= \dot{\mathbf{r}} & \text{su} & \partial(\Omega - S)_u \end{aligned}$$

- equazioni di equilibrio dell'interfaccia:

$$\mathcal{N} \dot{\sigma} = \dot{\mathbf{t}}_S$$

- equazioni di compatibilità cinematica sulla frontiera vincolata (2.54).



### Continuo elastico ed interfaccia dissipativa

Nell'ipotesi di comportamento elastico lineare del continuo e di interfaccia con comportamento rigidoplastica, le equazioni costitutive (2.65), (2.66) e (2.67) si particolarizzano rispettivamente:

- equazioni costitutive del continuo integro  $\Omega - \Omega_\varphi$ :

$$\dot{\sigma} = \mathbf{E} \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}}$$

- equazioni costitutive del continuo attraversato  $\Omega_\varphi - S$ :

$$\dot{\sigma} = \mathbf{E} \left[ \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}} \right]$$

- equazioni costitutive dell'interfaccia  $S$ :

$$\begin{aligned} \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket &= \dot{\lambda}_S \frac{\partial g_S(\mathbf{t}_S, \chi_S)}{\partial \mathbf{t}_S} \\ \mathbf{H}_S^{-1} \dot{\chi}_S + \dot{\lambda}_S \frac{\partial g_S(\mathbf{t}_S, \chi_S)}{\partial \chi_S} &= 0 \\ \dot{g}_S(\mathbf{t}_S, \dot{\chi}_S) &= 0 \end{aligned}$$

## 2.5 Bilancio energetico

Il problema del solido elastoplastico attraversato da discontinuità forti può essere analizzato anche da un punto di vista energetico.

L'energia immessa nel sistema, pari al lavoro compiuto dalle forze esterne, viene in parte accumulata dal solido (energia di deformazione elastica) ed in parte viene dissipata. Per il principio di conservazione dell'energia, il lavoro compiuto dalle forze esterne  $\mathcal{L}_e$  deve risultare pari alla somma dell'energia di deformazione elastica  $\mathcal{E}$  accumulata e dell'energia dissipata  $\mathcal{D}$ :

$$\mathcal{E} + \mathcal{D} = \mathcal{L}_e$$

dove

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \int_{\Omega-S} \varphi(\varepsilon_e) d\Omega + \int_S \varphi_S(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket_{S_e}) dS = \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega-S} \varepsilon_e^T \mathbf{E} \varepsilon_e d\Omega + \frac{1}{2} \int_S \llbracket \mathbf{u} \rrbracket_{S_e}^T \mathbf{E}_S \llbracket \mathbf{u} \rrbracket_{S_e} dS \end{aligned} \quad (2.69)$$

*Principio di conservazione dell'energia*

*Energia di deformazione elastica*

$$\mathcal{D} = \int_0^t \left[ \int_{\Omega-S} \sigma^T \dot{\varepsilon}_p d\Omega + \int_S \mathbf{t}_S^T \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket_{Sp} dS \right] d\tau \quad (2.70)$$

Energia dissipata

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_e = \int_0^t \left[ \int_{\Omega-\Omega_\varphi} \mathbf{b}^T \dot{\mathbf{u}} d\Omega + \int_{\Omega_\varphi-S} \mathbf{b}^T (\dot{\mathbf{u}} + \dot{\hat{\mathbf{u}}}) d\Omega + \right. \\ \left. + \int_{(\Omega-\Omega_\varphi)_q} \mathbf{q}^T \dot{\mathbf{u}} dS + \int_{(\Omega_\varphi-S)_q} \mathbf{q}^T (\dot{\mathbf{u}} + \dot{\hat{\mathbf{u}}}) dS + \right. \\ \left. + \int_{(\Omega-S)_u} \mathbf{r}^T \dot{\mathbf{u}} dS \right] d\tau \end{aligned}$$

Lavoro compiuto dalle forze esterne

### Continuo elastico ed interfaccia dissipativa

Nell'ipotesi di comportamento elastico lineare del continuo e di interfaccia con comportamento rigidoplastica, l'energia immessa nel sistema, viene in parte accumulata dal continuo ed in parte viene dissipata dall'interfaccia. Le espressioni dell'energia di deformazione e della dissipazione, rispettivamente definite dalle relazioni (2.69) e (2.70), diventano:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \int_{\Omega-S} \varphi(\varepsilon_e) d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega-S} \varepsilon_e^T \mathbf{E} \varepsilon_e d\Omega \\ \mathcal{D} &= \int_0^t \left[ \int_S \mathbf{t}_S^T \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket_{Sp} dS \right] d\tau \end{aligned}$$

## 2.6 Un semplice esempio

Si consideri la lastra di calcestruzzo riportata in Figura 2.5(a), sul cui lato sinistro è impedito lo spostamento orizzontali  $u_y$ ; sul lato destro viene impresso un cedimento orizzontale di intensità  $\delta$  crescente. Si ipotizzi che in corrispondenza dei punti di ascissa  $y = a/2$  vi sia la presenza di difetti o imperfezioni.

Per il continuo si assume comportamento elastico lineare isotropo, caratterizzato da modulo di elasticità normale  $E$  e coefficiente di Poisson  $\nu$ . Il comportamento dell'interfaccia, rigidoplastico con softening lineare (Figura 2.5(b)), è descritto attraverso la legge trazione separazione:

$$t_{Sn} = f_0 + H_S \llbracket \mathbf{u} \rrbracket_{Sn} \quad (2.71)$$

*Legge trazione  
separazione  
dell'interfaccia*

dove  $H_S$  è il modulo di incrudimento dell'interfaccia:

$$H_S = -\frac{f_0^2}{2G_f}$$

nella quale con  $f_0$  si è indicata la resistenza a trazione del calcestruzzo e con  $G_f$  l'energia di frattura, che rappresenta l'area sottesa dalla curva di Figura 2.5(b). D'altra parte risulta

$$H_S = -\frac{f_0}{\llbracket \mathbf{u} \rrbracket_{S0}}$$

e quindi la (2.71) diventa:

$$t_{Sn} = f_0 \left[ 1 - \frac{\llbracket \mathbf{u} \rrbracket_S}{\llbracket \mathbf{u} \rrbracket_{S0}} \right]$$

dove  $\llbracket \mathbf{u} \rrbracket_{S0}$  è il valore di apertura dell'interfaccia che segna il passaggio dalla zona coesiva a quella libera da tensioni.

La funzione di attivazione dell'interfaccia corrisponde al criterio della massima tensione normale di Rankine:

*Funzione di  
attivazione  
dell'interfaccia*

$$g_S(\mathbf{t}_S, \chi_S) = \mathbf{t}_S^T \mathbf{n} - f_0 - \chi_S$$

avendo indicato con  $\mathbf{n}$  la normale alla direzione dell'interfaccia.

Finché la tensione normale

*Fase elastica*

$$\sigma = E \frac{\delta}{a} \leq f_0$$

non eccede il valore della resistenza a trazione del calcestruzzo  $f_0$ , ovvero finché lo spostamento impresso risulta minore dello spostamento limite elastico

$$\delta \leq \frac{f_0}{E} a \quad (2.72)$$

la lastra si comporta elasticamente (tratto OP); pertanto il campo degli spostamenti ha componenti:

$$u_y = \frac{\delta}{a} y \quad (2.73a)$$

$$u_z = -\nu \frac{\delta}{a} z \quad (2.73b)$$

Dalle figure 2.6 si nota che la componente orizzontale del campo di spostamento  $u_y$ , le tensioni normali  $\sigma_y$  ed crescono proporzionalmente al crescere dello spostamento impresso  $\delta$ , mentre la componente verticale del campo di spostamento  $u_z$  diminuisce e il salto nel campo degli spostamenti  $[[\mathbf{u}]]_S$  si mantiene nullo (tratto OP). Inoltre la componente orizzontale dello spostamento è continua, ed varia linearmente con  $y$  (segmento contrassegnato con P in Figura 2.5(c)).

Fase post picco

Appena lo spostamento impresso raggiunge il valore  $\frac{f_0}{E} a$ , la condizione sulla funzione di attivazione dell'interfaccia viene soddisfatta con l'uguaglianza ( $g_S = 0$ ): lungo i punti di ascissa  $a/2$  si potrebbe attivare l'interfaccia. Affinchè l'interfaccia si attivi deve risultare soddisfatta con il segno di uguaglianza la condizione di consistenza  $\dot{g}_S = 0$ , fatto che si verifica quando lo spostamento impresso, raggiunto il valore  $\frac{f_0}{E} a$ , continua a crescere.

In tal caso la lastra si presenta divisa in due lastre più piccole di dimensioni  $(a/2 \times b)$ , che risultano tese. Il campo degli spostamenti in ciascuna lastra è lineare, del tipo (2.73), ma in corrispondenza dell'interfaccia presenta un salto (Figura 2.5(c), curva M):

$$u_y = \underbrace{\frac{\delta}{a} y}_{\hat{u}_y} + \underbrace{\left( \mathbb{H} \left( y - \frac{a}{2} \right) - \frac{y}{a} \right) [[\mathbf{u}]]_S}_{\hat{u}_y} \quad (2.74a)$$

$$u_z = -\nu \underbrace{\frac{\delta}{a} z}_{\hat{u}_z} + \nu \underbrace{\frac{[[\mathbf{u}]]_S}{a} z}_{\hat{u}_z} \quad (2.74b)$$

dove  $\mathbb{H} \left( y - \frac{a}{2} \right)$  è la funzione di Heaveside:

$$\mathbb{H} \left( y - \frac{a}{2} \right) = \begin{cases} 0, & y < a/2 \\ 1, & y > a/2 \end{cases}$$

Dal campo degli spostamenti (2.74) si ricavano le deformazioni nelle lastre

$$\varepsilon_y = \underbrace{\frac{\delta}{a}}_{\hat{\varepsilon}_y} + \underbrace{\left( -\frac{[[\mathbf{u}]]_S}{a} \right)}_{\hat{\varepsilon}_y}$$

$$\varepsilon_z = -\nu \underbrace{\frac{\delta}{a}}_{\hat{\varepsilon}_z} + \nu \underbrace{\frac{[[\mathbf{u}]]_S}{a}}_{\hat{\varepsilon}_z}$$

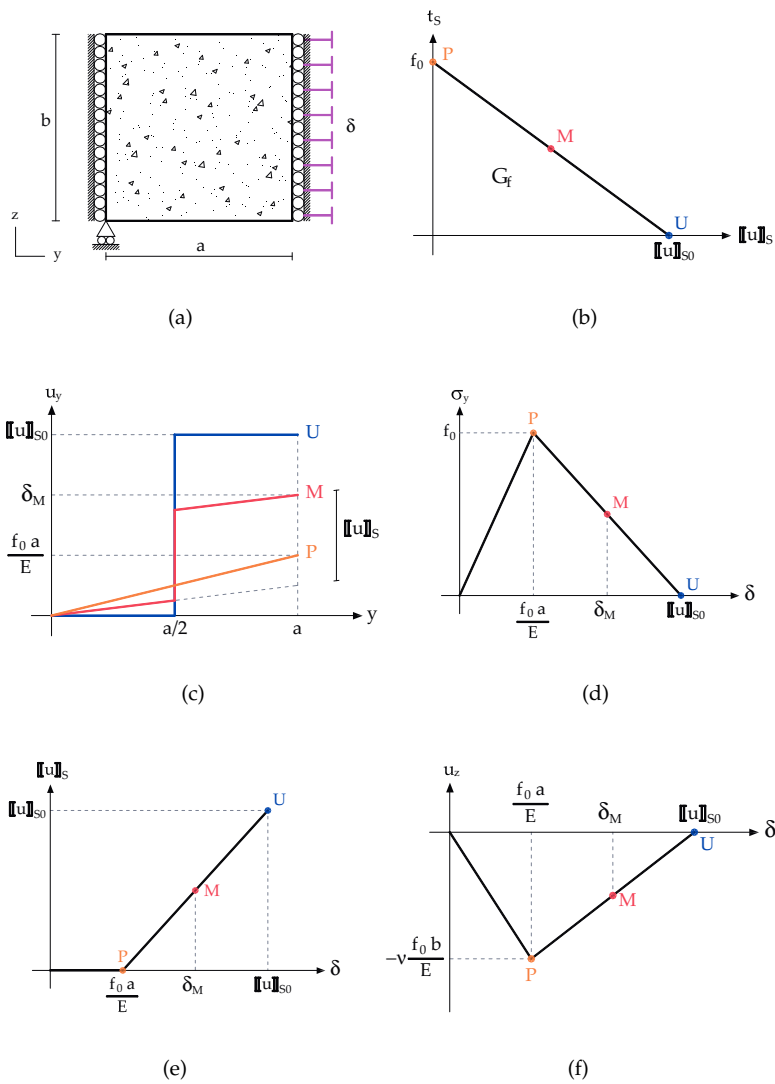


Figura 2.5: (a) Lastra tesa, (b) legge trazione separazione, (c) spostamento longitudinale, (d) tensione normale  $\sigma_y$ , (e) salto e (f) spostamento trasversale.

e le relative tensioni (Figura 2.5(d))

$$\sigma_y = E \frac{\delta - \llbracket \mathbf{u} \rrbracket_S}{a}. \quad (2.75)$$

Al fine di calcolare il salto nel campo degli spostamenti  $\llbracket \mathbf{u} \rrbracket_S$ , nello spirito del metodo degli spostamenti, si considera l'equazione di equilibrio all'interfaccia:

$$\sigma_y = t_{Sn}$$

dove  $\sigma_y$  e  $t_{Sn}$  sono date rispettivamente dalle relazioni (2.75) e (2.72). Sostituendo e risolvendo per  $\llbracket \mathbf{u} \rrbracket_S$  si ottiene (Figura 2.5(e)):

$$\llbracket \mathbf{u} \rrbracket_S = \frac{E\delta - f_0a}{E\llbracket \mathbf{u} \rrbracket_{S0} - f_0a} \llbracket \mathbf{u} \rrbracket_{S0}$$

Nella Figura 2.6 sono riportate le configurazioni deformate della lastra in corrispondenza dell'innesco dell'interfaccia, ovvero nell'istante nel quale la tensione normale raggiunge il picco (P), durante l'apertura dell'interfaccia (M) e della completa apertura (U).

*Bilancio energetico*

Lo schema del bilancio energetico del fenomeno, riportato in figura 2.7, evidenzia una prima fase elastica ( $0 \leq t \leq t_P$ ), durante la quale l'energia immessa nel sistema, pari al lavoro compiuto dalle forze esterne (curva arancio tratteggiata)

$$\mathcal{L}_e = \frac{1}{2} Eabt \left( \frac{\delta}{a} \right)^2,$$

viene accumulata dal continuo elastico sotto forma di energia di deformazione (curva blu)

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} Eabt \left( \frac{\delta}{a} \right)^2$$

Raggiunta la tensione di rottura del materiale si ha l'innesco dell'interfaccia ( $t_P \leq t \leq t_U$ ). In questa fase l'energia immessa nel sistema

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_e = & \frac{Eabt f_0}{E\llbracket \mathbf{u} \rrbracket_{S0} - f_0a} \left\{ \llbracket \mathbf{u} \rrbracket_{S0} \left( \frac{\delta}{a} - \frac{f_0}{E} \right) - \frac{a}{2} \left[ \left( \frac{\delta}{a} \right)^2 - \left( \frac{f_0}{E} \right)^2 \right] \right\} + \\ & + \frac{1}{2} Eabt \left( \frac{f_0}{E} \right)^2 \end{aligned}$$

viene dissipata a causa della progressiva apertura dell'interfaccia (curva rossa)

$$\mathcal{D} = \frac{E^2 abt f_0 \llbracket \mathbf{u} \rrbracket_{S0}}{(E\llbracket \mathbf{u} \rrbracket_{S0} - f_0a)^2} \left\{ \llbracket \mathbf{u} \rrbracket_{S0} \left( \frac{\delta}{a} - \frac{f_0}{E} \right) - \frac{a}{2} \left[ \left( \frac{\delta}{a} \right)^2 - \left( \frac{f_0}{E} \right)^2 \right] \right\}$$

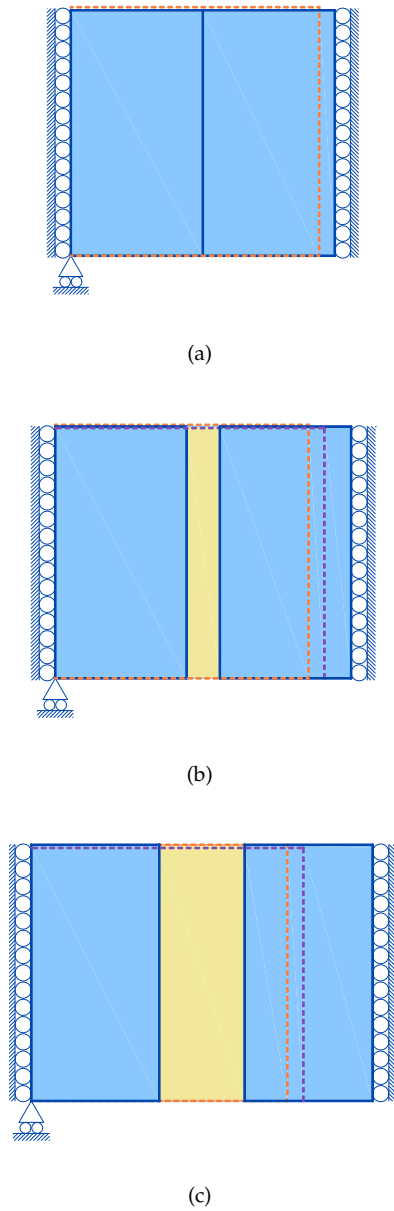


Figura 2.6: Configurazione indeformata (tratteggio arancio) a confronto con configurazioni deformate: (a) all'innesco (tratteggio magenta), (b) durante l'apertura e (c) alla completa apertura dell'interfaccia.

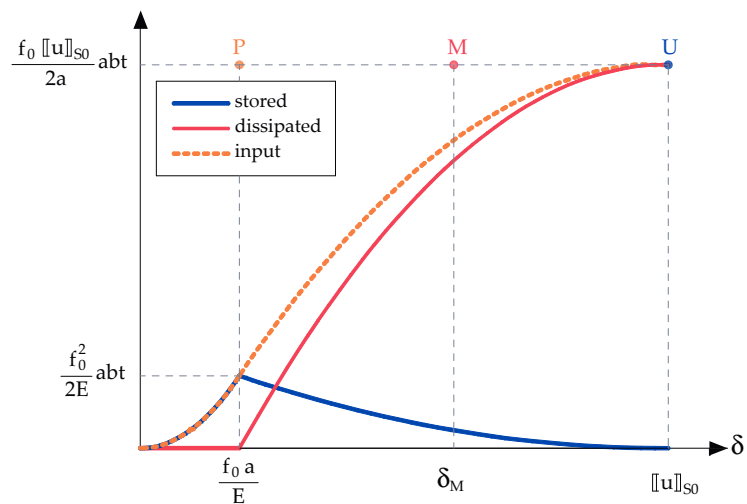


Figura 2.7: Bilancio energetico

insieme all'energia di deformazione restituita dal continuo in conseguenza allo scarico

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} E abt f_0^2 \left( \frac{\llbracket \mathbf{u} \rrbracket_{S_0} - \delta}{E \llbracket \mathbf{u} \rrbracket_{S_0} - f_0 a} \right)^2.$$



## Capitolo 3

# IMPLEMENTAZIONE NEL METODO DEGLI ELEMENTI FINITI

La soluzione in forma chiusa del problema del solido elastoplastico attraversato da discontinuità forti è nota solo per una classe ristretta casi, caratterizzati da geometria e condizioni di carico semplici, come l'esempio mostrato nel paragrafo 2.6. Molti problemi vengono pertanto risolti in maniera approssimata attraverso l'utilizzo di metodi numerici. In questo capitolo è presentata la soluzione del problema del solido elastoplastico attraversato da discontinuità forti, descritto al capitolo 2, mediante la tecnica numerica che viene maggiormente applicata per risolvere problemi con geometria e condizioni al contorno arbitrarie: il Metodo degli Elementi Finiti.

### 3.1 Formulazione in termini incrementali

L'analisi agli elementi finiti si pone l'obiettivo di tracciare la risposta di un modello strutturale soggetto ad una certa storia di carico. Tale obiettivo è perseguito usando una procedura incrementale-iterativa. La storia di carico viene allora suddivisa in  $N$  incrementi di ampiezza finita

*Discretizzazione  
della storia di carico*

$$\Delta t_{n+1} = \int_{t_n}^{t_{n+1}} dt$$

tali che

$$t_{n+1} = t_n + \Delta t_{n+1}.$$

La generica variabile al generico istante di tempo  $t_{n+1}$ , adottando uno schema di integrazione totalmente implicito, assume l'espressione:

$$\underbrace{\sigma(t_{n+1})}_{\sigma_{n+1}} = \underbrace{\sigma(t_n)}_{\sigma_n} + \underbrace{\dot{\sigma}(t_{n+1})\Delta t_{n+1}}_{\Delta\sigma_{n+1}}$$

*Problema di  
ottimizzazione  
incrementale*

e pertanto il problema di ottimizzazione (2.63) in termini incrementali si pone nella forma:

$$\underset{(\Delta\hat{\mathbf{u}}, \Delta\tilde{\mathbf{u}})}{\text{stat}} \sup_{(\Delta\sigma, \Delta\chi, \Delta\mathbf{t}_S, \Delta\chi_S)} \inf_{(\Delta\lambda \geq 0, \Delta\lambda_S \geq 0)} \underset{\Delta\mathbf{r}}{\text{stat}} \Pi_t^{HR}$$

*Funzionale di  
Hellinger-Reissner  
tangente  
incrementale*

dove

$$\begin{aligned} \Pi_t^{HR} = & - \int_{\Omega - \Omega_\varphi} (\varphi'_t(\Delta\sigma) + \pi'_t(\Delta\chi)) d\Omega - \int_{\Omega_\varphi - S} (\varphi'_t(\Delta\sigma) + \pi'_t(\Delta\chi)) d\Omega - \\ & - \int_S (\varphi'_{S,t}(\Delta\mathbf{t}_S) + \pi'_{S,t}(\Delta\chi_S)) dS - \int_{\Omega - \Omega_\varphi} \Delta\lambda \Delta g(\Delta\sigma, \Delta\chi) d\Omega - \\ & - \int_{\Omega_\varphi - S} \Delta\lambda \Delta g(\Delta\sigma, \Delta\chi) d\Omega - \int_S \Delta\lambda_S \Delta g_S(\Delta\mathbf{t}_S, \Delta\chi_S) dS + \\ & + \int_{\Omega - \Omega_\varphi} \Delta\sigma^T \mathbf{C} \Delta\hat{\mathbf{u}} d\Omega + \int_{\Omega_\varphi - S} \Delta\sigma^T (\mathbf{C} \Delta\hat{\mathbf{u}} + \mathbf{C} \Delta\tilde{\mathbf{u}}) d\Omega + \\ & + \int_S \Delta\mathbf{t}_S^T \Delta[\tilde{\mathbf{u}}] dS - \\ & - \int_{\Omega - \Omega_\varphi} \Delta\mathbf{b}^T \Delta\hat{\mathbf{u}} d\Omega - \int_{\Omega_\varphi - S} \Delta\mathbf{b}^T (\Delta\hat{\mathbf{u}} + \Delta\tilde{\mathbf{u}}) d\Omega - \\ & - \int_{\partial(\Omega - \Omega_\varphi)_q} \Delta\mathbf{q}^T \Delta\hat{\mathbf{u}} d\Omega - \int_{\partial(\Omega_\varphi - S)_q} \Delta\mathbf{q}^T (\Delta\hat{\mathbf{u}} + \Delta\tilde{\mathbf{u}}) d\Omega - \\ & - \int_{\partial(\Omega - \Omega_\varphi)_u} \Delta\mathbf{r}^T (\Delta\hat{\mathbf{u}} - \Delta\tilde{\mathbf{u}}) d\Omega - \int_{\partial(\Omega_\varphi - S)_u} \Delta\mathbf{r}^T (\Delta\hat{\mathbf{u}} - \Delta\tilde{\mathbf{u}}) d\Omega \end{aligned} \quad (3.1)$$

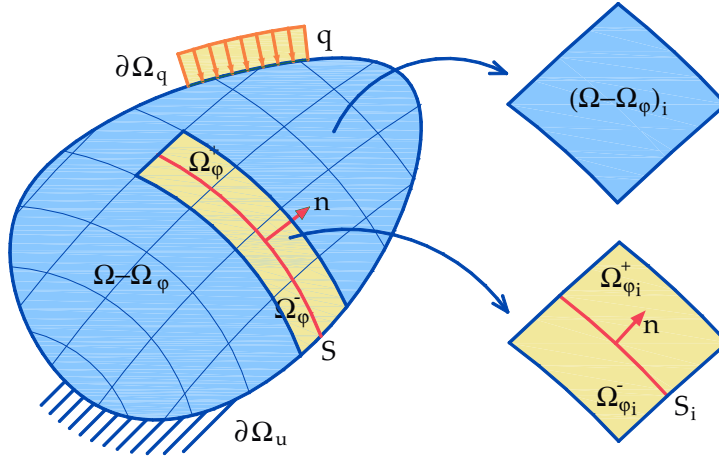


Figura 3.1: Discretizzazione della geometria: elementi interi ed attraversati dall'interfaccia.

nella quale si sono fatte le posizioni

$$\Delta g(\sigma, \Delta\sigma, \chi, \Delta\chi) = \left(\frac{\partial g}{\partial \sigma}\right)^T \Delta\sigma + \left(\frac{\partial g}{\partial \chi}\right)^T \Delta\chi \quad (3.2)$$

$$\Delta g_S(\mathbf{t}_S, \Delta\mathbf{t}_S, \chi_S, \Delta\chi_S) = \left(\frac{\partial g_S}{\partial \mathbf{t}_S}\right)^T \Delta\mathbf{t}_S + \left(\frac{\partial g_S}{\partial \chi_S}\right)^T \Delta\chi_S \quad (3.3)$$

avendo ommesso l'indice  $n + 1$  per brevità di notazione.

### 3.2 Cinematica delle discontinuità forti discretizzata

Si consideri inoltre una suddivisione del dominio  $\Omega$  in  $n_{el}$  elementi finiti (Figura 3.1), dei quali  $n_\varphi$  sono attraversati dall'interfaccia, tali che:

*Discretizzazione del dominio geometrico*

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{n_{el}} \Omega_i$$

Nell'ambito dell' $i$ -esimo elemento finito, la parte regolare del campo di spostamento  $\hat{\mathbf{u}}_i$  viene espresso, attraverso le funzioni di forma

*Parte regolare del campo di spostamento*

standard, in funzione del vettore degli spostamenti nodali  $\hat{\mathbf{d}}_i$  attraverso la relazione [55, 68]:

$$\hat{\mathbf{u}}_i = \hat{\mathbf{N}}_i \hat{\mathbf{d}}_i \quad (3.4)$$

dove  $\hat{\mathbf{N}}_i$  rappresenta la matrice delle funzioni di forma standard dell'elemento. Inoltre detto  $\hat{\mathbf{d}}$  il vettore degli spostamenti nodali dell'intero sistema si ha:

$$\hat{\mathbf{d}}_i = \hat{\mathbf{L}}_i \hat{\mathbf{d}}$$

dove  $\hat{\mathbf{L}}_i$  è la matrice di connettività nodale dell' $i$ -esimo elemento. Inoltre, negli  $n_\varphi$  elementi attraversati dalla discontinuità, la parte singolare del campo di spostamento  $\tilde{\mathbf{u}}_i$  è dato dalla relazione:

$$\tilde{\mathbf{u}}_i = \tilde{\mathbf{N}}_i \tilde{\mathbf{d}}_i \quad (3.5)$$

nella quale  $\tilde{\mathbf{N}}_i$  è la matrice delle funzioni di forma singolari dell'elemento,  $\tilde{\mathbf{d}}_i$  è il vettore degli spostamenti nodali aggiuntivi dell'elemento, espresso in funzione del vettore degli spostamenti nodali aggiuntivi dell'intero sistema attraverso la relazione:

$$\tilde{\mathbf{d}}_i = \tilde{\mathbf{L}}_i \tilde{\mathbf{d}}$$

dove  $\tilde{\mathbf{L}}_i$  è la matrice di connettività nodale dei gradi di libertà singolari dell' $i$ -esimo elemento.

Dalle relazioni (3.4) e (3.5) è possibile derivare le deformazioni. Sostituendole rispettivamente nella (2.3) si ottiene

$$\varepsilon_i = \mathbf{C}\hat{\mathbf{B}}_i \hat{\mathbf{d}}_i + \mathbf{C}\tilde{\mathbf{B}}_i \tilde{\mathbf{d}}_i.$$

nelle quali si è posto  $\hat{\mathbf{B}}_i = \mathbf{C}\hat{\mathbf{N}}_i$  e  $\tilde{\mathbf{B}}_i = \mathbf{C}\tilde{\mathbf{N}}_i$ , rispettivamente dette matrice delle derivate delle funzioni di forma regolari e singolari.

### 3.3 Funzioni di forma

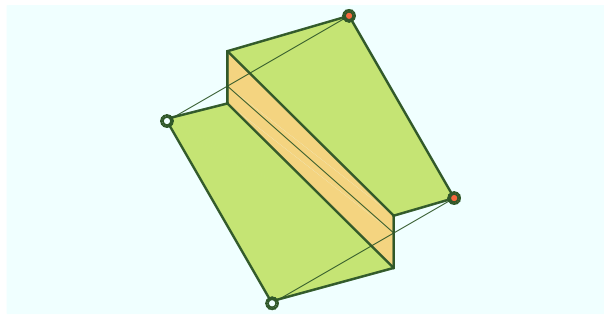
Il campo degli spostamenti regolari è approssimato con le funzioni di forma dell'elemento rettangolare bilineare a quattro nodi standard.

Le funzioni di forma che approssimano il campo degli spostamenti singolare si presentano discontinue in corrispondenza dell'interfaccia (Figura 3.2). In letteratura sono presenti due tipi di approssimazioni per il salto: salto costante lungo l'interfaccia [46] e salto lineare [1].

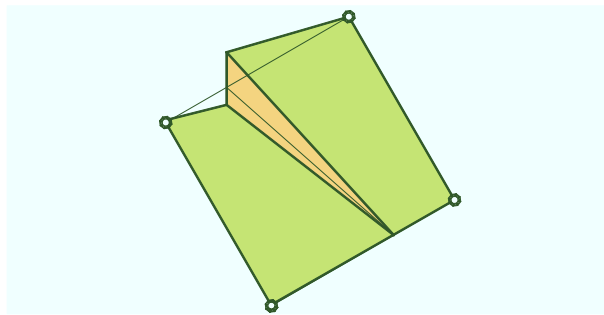
Nell'ipotesi di salto costante, il campo degli spostamenti è arricchito attraverso l'aggiunta di un grado di libertà per componente di

Parte singolare del  
campo di  
spostamento

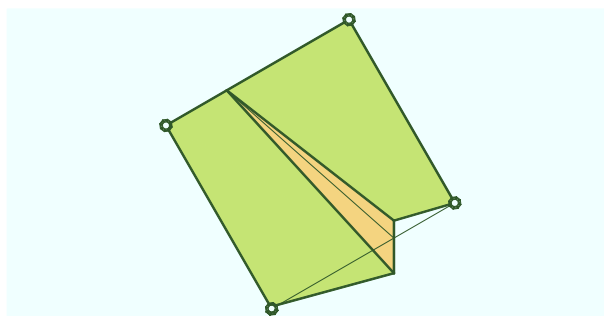
Deformazioni



(a)



(b)



(c)

Figura 3.2: Funzioni di forma singolari per interpolazione del salto: (a) costante; (b) e (c) lineare.

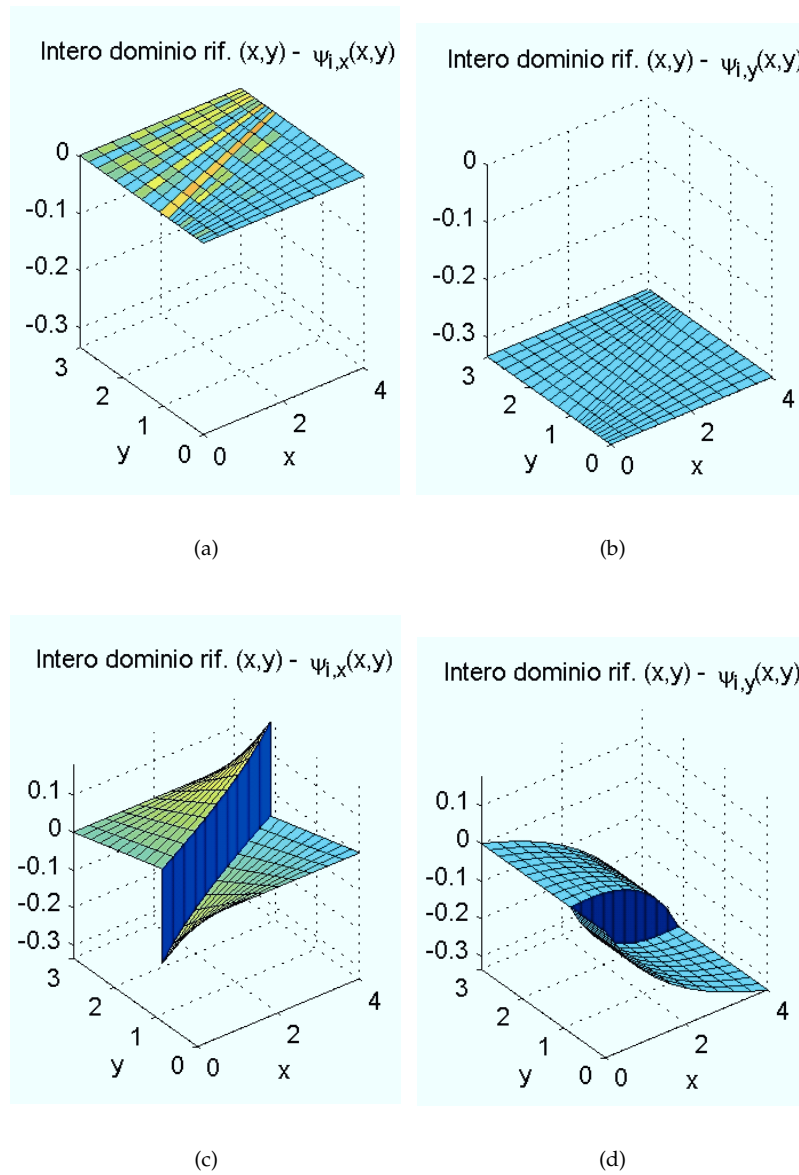


Figura 3.3: Derivate delle funzioni di forma singolari per interpolazione del salto: (a) e (b) costante; (c) e (d) lineare.

spostamento. In tal caso, come si vedrà in seguito, le derivate spaziali di tali funzioni risultano continue in corrispondenza dell'interfaccia (Figura 3.3).

Il salto però, nel passaggio da un elemento attraversato all'altro, è discontinuo (Figura 3.4).

Scegliendo di approssimare il salto linearmente il campo degli spostamenti arricchito è necessario aggiungere due gradi di libertà per componente di spostamento. Il problema diventa quindi di dimensioni maggiori rispetto al caso di salto costante. Inoltre le derivate spaziali di tali funzioni risultano discontinue in corrispondenza dell'interfaccia (Figure 3.3(c) e 3.3(d)). Quando i due gradi di libertà vengono scelti globali ed alle estremità dell'interfaccia, il salto in corrispondenza di quest'ultima non presenta discontinuità nel passaggio da un elemento attraversato all'altro (Figura 3.4(c)).

Indipendentemente dall'approssimazione scelta per il salto, tali funzioni sono costruite in modo da riprodurre il moto rigido tra le due parti dell'elemento finito attraversato dalla discontinuità.

Al fine di poter ricavare l'espressione analitica di queste funzioni di forma, si consideri un elemento finito rettangolare bilineare a quattro nodi attraversato da un'interfaccia inclinata rispetto ai lati (Figura 3.5). Tali espressioni saranno dapprima ricavate nell'ipotesi di salto costante; successivamente si ricaveranno le analoghe espressioni per il caso di salto lineare.

### 3.3.1 Salto costante

Si consideri un elemento rettangolare bilineare a quattro nodi attraversato da una interfaccia. Si impoга un generico moto rigido tra le due parti che, nel caso di salto costante, consiste in una traslazione relativa tra le due parti (Figura 3.5(a)).

Le due componenti del campo degli spostamenti risultano:

$$\tilde{u}_n = \mathbb{H}\tilde{d}_n$$

$$\tilde{u}_m = \mathbb{H}\tilde{d}_m$$

dove  $\mathbb{H}$  è la funzione di Heaveside D'altra parte deve essere

$$u_n = \hat{u}_n + \tilde{u}_n \quad (3.6a)$$

$$u_m = \hat{u}_m + \tilde{u}_m \quad (3.6b)$$

dove

$$\hat{u}_n = (N_2 + N_3)\tilde{d}_n$$

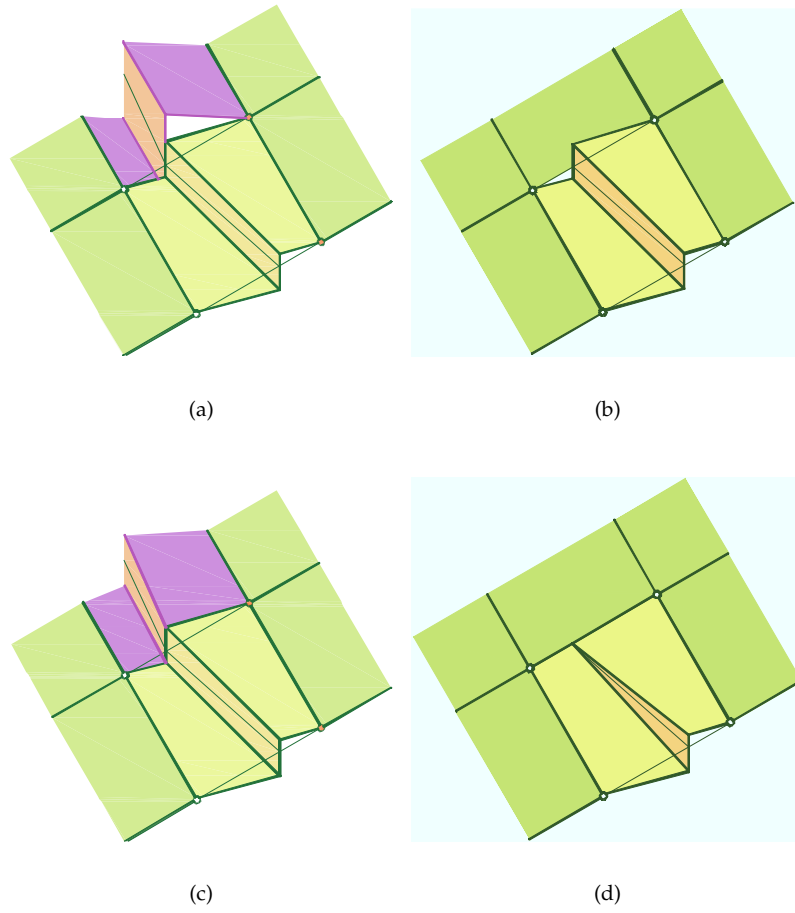
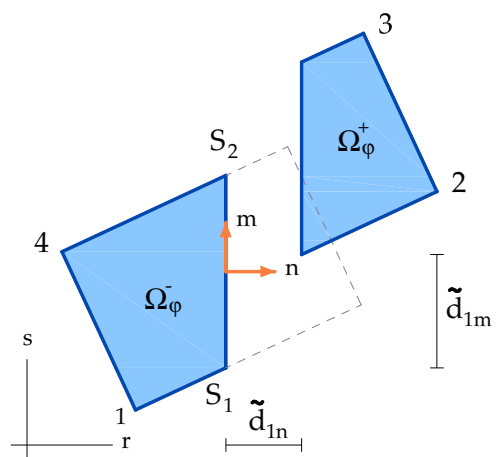
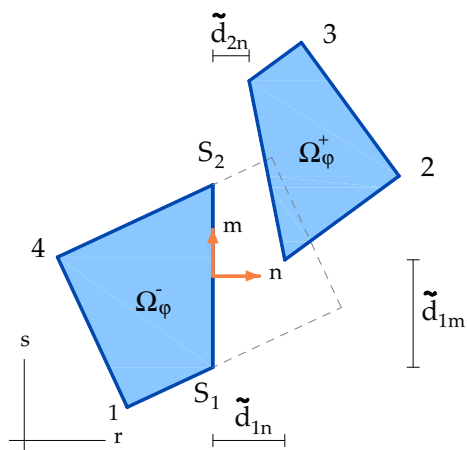


Figura 3.4: Funzioni di forma singolari per interpolazione del salto: (a) e (b) costante; (c) e (d) lineare.





(a)



(b)

Figura 3.5: Moto rigido: (a) salto costante e (b) salto lineare.

$$\begin{aligned}\hat{u}_m &= (N_2 + N_3) \tilde{d}_m \\ \tilde{u}_n &= \tilde{N} \tilde{d}_n \\ \tilde{u}_m &= \tilde{N} \tilde{d}_m\end{aligned}$$

La funzione di forma singolare risulta pertanto

$$\tilde{N} = \mathbb{H} - (N_2 + N_3)$$

In generale la funzione di forma singolare risulta data dalla relazione [46]:

$$\tilde{N} = \mathbb{H} - \varphi \quad (3.7)$$

dove  $\varphi$  è data dalla somma delle funzioni di forma relative ai nodi  $N_{\varphi+}$  che si trovano sul contorno di  $\Omega_{\varphi}^+$ :

$$\varphi = \sum_{i=1}^{N_{\varphi+}} N_i.$$

La relazione (3.7) consente di calcolare la funzione  $\tilde{N}$  anche nei casi in cui l'interfaccia non interseca due lati opposti (Figura 3.6).

### 3.3.2 Salto lineare

Nel caso di salto lineare il moto rigido tra le due parti consiste in una traslazione ed in una rotazione relative (Figura 3.5(b)).

Le due componenti del campo degli spostamenti risultano:

$$\begin{aligned}\tilde{u}_n &= \mathbb{H} \left( \tilde{d}_{1n} - \frac{\tilde{d}_{1n} - \tilde{d}_{2n}}{l_S} (s - s_{S_1}) \right) \\ \tilde{u}_m &= \mathbb{H} \left( \tilde{d}_{1m} + \frac{\tilde{d}_{1n} - \tilde{d}_{2n}}{l_S} (r - r_{S_1}) \right)\end{aligned}$$

dove  $\mathbb{H}$  è la funzione di Heaveside ed  $l_S$  è la lunghezza dell'interfaccia. D'altra parte deve valere la relazione (3.6), nella quale

$$\begin{aligned}\hat{u}_n &= N_2 \left( \tilde{d}_{1n} - \frac{\tilde{d}_{1n} - \tilde{d}_{2n}}{l_S} (s_2 - s_{S_1}) \right) + \\ &+ N_3 \left( \tilde{d}_{1n} - \frac{\tilde{d}_{1n} - \tilde{d}_{2n}}{l_S} (s_3 - s_{S_1}) \right)\end{aligned}$$

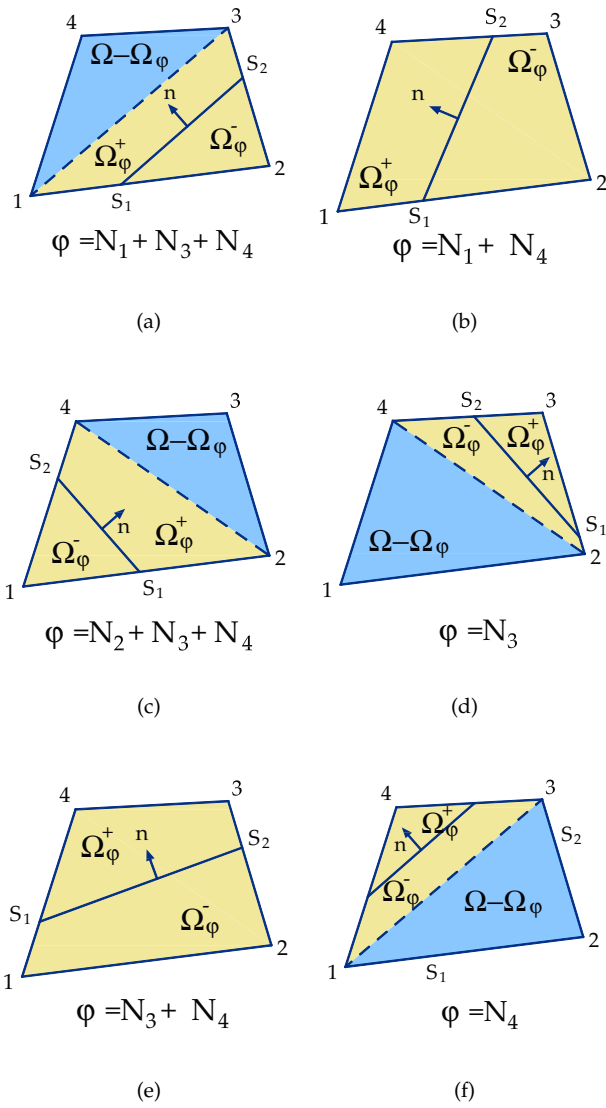


Figura 3.6: Funzioni di forma singolari (a) caso 1, (b) caso 2, (c) caso 3, (d) caso 4, (e) caso 5 e (f) caso 6.

$$\begin{aligned}\hat{u}_m &= N_2 \left( \tilde{d}_{1m} + \frac{\tilde{d}_{1n} - \tilde{d}_{2n}}{l_S} (r_2 - r_{S_1}) \right) + \\ &\quad + N_3 \left( \tilde{d}_{1m} + \frac{\tilde{d}_{1n} - \tilde{d}_{2n}}{l_S} (r_3 - r_{S_1}) \right) \\ \tilde{u}_n &= \tilde{N}_1 \tilde{d}_{1n} + \tilde{N}_2 \tilde{d}_{2n} \\ \tilde{u}_m &= \tilde{N}_1 \tilde{d}_{1m} + \tilde{N}_2 \tilde{d}_{2m} + \tilde{N}_1^{nm} \tilde{d}_{1n} + \tilde{N}_2^{nm} \tilde{d}_{2n}\end{aligned}$$

Le funzioni di forma singolari risultano pertanto

$$\begin{aligned}\tilde{N}_1 &= \mathbb{H} \left( 1 - \frac{s - s_{S_1}}{l_S} \right) - \\ &\quad - \left[ N_2 \left( 1 - \frac{s_2 - s_{S_1}}{l_S} \right) + N_3 \left( 1 - \frac{s_3 - s_{S_1}}{l_S} \right) \right] \\ \tilde{N}_2 &= \mathbb{H} \frac{s - s_{S_1}}{l_S} - \\ &\quad - \left[ N_2 \left( 1 - \frac{s_2 - s_{S_1}}{l_S} \right) + N_3 \left( 1 - \frac{s_3 - s_{S_1}}{l_S} \right) \right] \\ \tilde{N}_1^{nm} &= \mathbb{H} \frac{r - r_{S_1}}{l_S} - N_2 \frac{r_2 - r_{S_1}}{l_S} - N_3 \frac{r_3 - r_{S_1}}{l_S} \\ \tilde{N}_2^{nm} &= -\mathbb{H} \frac{r - r_{S_1}}{l_S} + N_2 \frac{r_2 - r_{S_1}}{l_S} + N_3 \frac{r_3 - r_{S_1}}{l_S}\end{aligned}$$

L'elemento finito ottenuto utilizzando le funzioni di forma appena ricavate presenta problemi di shear locking quando viene assegnata una distribuzione di tensioni con andamento lineare. Gli incrementi di tensione al bordo caricato vengono equilibrati dalle tensioni tangenziali spurie che nascono in un elemento a quattro nodi se sottoposto a sollecitazioni di flessione. Detto fenomeno impedisce la propagazione dell'interfaccia, in quanto la crescita delle tensioni tangenziali fa diminuire il valore delle trazioni all'interfaccia, che subisce uno scarico elastico.

Anche l'introduzione di una approssimazione del campo di spostamento regolare con le funzioni di forma dell'elemento rettangolare biquadratico a otto nodi standard, il problema del shear locking non si risolve.

In alternativa si è pensato di affiancare alle funzioni di forma discontinue, costruite in modo da riprodurre il moto rigido, ulteriori funzioni, nulle in corrispondenza dell'interfaccia (Figura 3.7) che conferi-

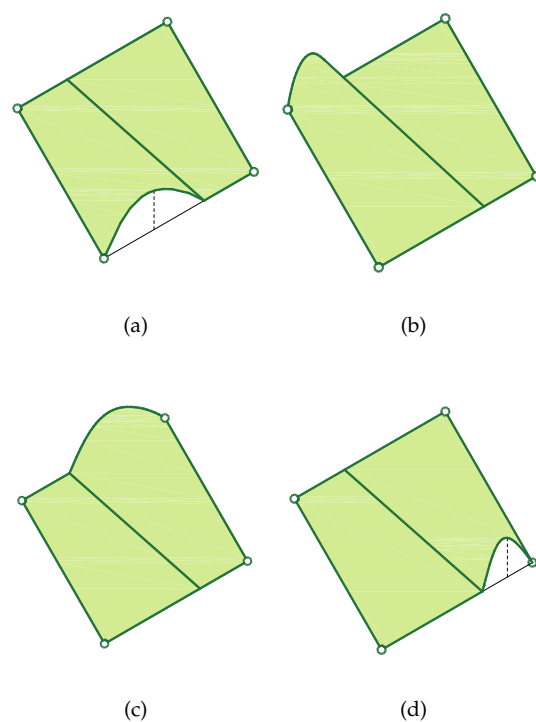


Figura 3.7: Funzioni di forma singolari.

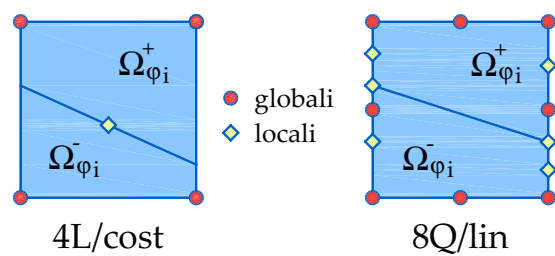


Figura 3.8: Elementi con discontinuità immerse: elemento bilineare a quattro con salto costante ( $4L/cost$ ) e elemento biquadratico a otto nodi con salto lineare ( $8Q/lin$ )

scano la capacità di defomarsi ai due sottoelementi individuati dall'interfaccia, passando da elementi bilineari a quattro (4L/cost) ad elementi biquadratici a otto nodi (8Q/lin) illustrati in Figura 3.8.

### 3.4 Formulazione variazionale discretizzata

*Funzionale di  
Hellinger-Reissner  
discretizzato in  
termini incrementali*

Al fine di ricavare la forma discretizzata delle equazioni che governano il problema del solido elastoplastico attraversato da discontinuità, si ricava l'espressione discretizzata in termini incrementali del funzionale di Hellinger-Reissner, sostituendo le espressioni (3.5) e (3.4), che approssimano i campi di spostamento regolare  $\hat{u}$  e singolare  $\tilde{u}$ , nell'equazione (3.1):

$$\begin{aligned}
\Pi_t^{HR} = & \sum_{i=1}^{n_{el}-n_\varphi} \left\{ - \int_{(\Omega-\Omega_\varphi)_i} [\varphi'_{t,i}(\Delta\sigma_i) + \pi'_{t,i}(\Delta\chi_i)] d\Omega - \right. \\
& - \int_{(\Omega-\Omega_\varphi)_i} \Delta\lambda_i \Delta g(\Delta\sigma_i, \Delta\chi_i) d\Omega + \int_{(\Omega-\Omega_\varphi)_i} \Delta\sigma_i^T \mathbf{C}\hat{\mathbf{N}}_i \hat{\mathbf{L}}_i \Delta\hat{\mathbf{d}} d\Omega - \\
& - \int_{(\Omega-\Omega_\varphi)_i} \Delta\mathbf{b}_i^T \hat{\mathbf{N}}_i \hat{\mathbf{L}}_i \Delta\hat{\mathbf{d}} d\Omega - \int_{\partial(\Omega-\Omega_\varphi)_{q,i}} \Delta\mathbf{q}_i^T \hat{\mathbf{N}}_i \hat{\mathbf{L}}_i \Delta\hat{\mathbf{d}} d\Omega - \\
& \left. - \int_{\partial(\Omega-\Omega_\varphi)_{u,i}} \Delta\mathbf{r}_i^T (\hat{\mathbf{N}}_i \hat{\mathbf{L}}_i \Delta\hat{\mathbf{d}} - \hat{\mathbf{N}}_i \hat{\mathbf{L}}_i \Delta\bar{\mathbf{d}}) d\Omega \right\} + \\
& + \sum_{i=1}^{n_\varphi} \left\{ - \int_{(\Omega_\varphi-S)_i} [\varphi'_{t,i}(\Delta\sigma_i) + \pi'_{t,i}(\Delta\chi_i)] d\Omega - \right. \\
& - \int_{S_i} [\varphi'_{S,ti}(\Delta\mathbf{t}_{S,i}) + \pi'_{S,ti}(\Delta\chi_{S,i})] dS - \\
& - \int_{(\Omega_\varphi-S)_i} \Delta\lambda_i \Delta g(\Delta\sigma_i, \Delta\chi_i) d\Omega - \int_{S_i} \Delta\lambda_{S,i} \Delta g_S(\Delta\mathbf{t}_{S,i}, \Delta\chi_{S,i}) dS + \\
& + \int_{(\Omega_\varphi-S)_i} \Delta\sigma_i^T (\mathbf{C}\hat{\mathbf{N}}_i \hat{\mathbf{L}}_i \Delta\hat{\mathbf{d}} + \mathbf{C}\tilde{\mathbf{N}}_i \tilde{\mathbf{L}}_i \Delta\tilde{\mathbf{d}}) d\Omega + \\
& + \int_{S_i} \Delta\mathbf{t}_{S,i}^T [[\tilde{\mathbf{N}}]_i \tilde{\mathbf{L}}_i \Delta\tilde{\mathbf{d}}] dS - \\
& - \int_{(\Omega_\varphi-S)_i} \Delta\mathbf{b}_i^T (\hat{\mathbf{N}}_i \hat{\mathbf{L}}_i \Delta\hat{\mathbf{d}} + \tilde{\mathbf{N}}_i \tilde{\mathbf{L}}_i \Delta\tilde{\mathbf{d}}) d\Omega - \\
& - \int_{\partial(\Omega_\varphi-S)_{q,i}} \Delta\mathbf{q}_i^T (\hat{\mathbf{N}}_i \hat{\mathbf{L}}_i \Delta\hat{\mathbf{d}} + \tilde{\mathbf{N}}_i \tilde{\mathbf{L}}_i \Delta\tilde{\mathbf{d}}) d\Omega - \\
& \left. - \int_{\partial(\Omega_\varphi-S)_{u,i}} \Delta\mathbf{r}_i^T (\hat{\mathbf{N}}_i \hat{\mathbf{L}}_i \Delta\hat{\mathbf{d}} - \hat{\mathbf{N}}_i \hat{\mathbf{L}}_i \Delta\bar{\mathbf{d}}) d\Omega \right\}
\end{aligned}$$

PO1  
Equilibrio

Il problema di ottimizzazione assume pertanto la forma discretizzata in termini incrementali:

$$\begin{aligned}
\inf_{(\Delta \hat{\mathbf{d}}, \Delta \tilde{\mathbf{d}})} & \left\{ \sum_{i=1}^{n_{el}-n_{\varphi}} \left[ \Phi_{(\Omega-\Omega_{\varphi})_i}(\Delta \hat{\mathbf{d}}) - \int_{(\Omega-\Omega_{\varphi})_i} \Delta \mathbf{b}_i^T \hat{\mathbf{N}}_i \hat{\mathbf{L}}_i \Delta \hat{\mathbf{d}} d\Omega - \right. \right. \\
& - \int_{\partial(\Omega-\Omega_{\varphi})_{q,i}} \Delta \mathbf{q}_i^T \hat{\mathbf{N}}_i \hat{\mathbf{L}}_i \Delta \hat{\mathbf{d}} dS - \\
& - \left. \int_{\partial(\Omega-\Omega_{\varphi})_{u,i}} \Delta \mathbf{r}_i^T (\hat{\mathbf{N}}_i \hat{\mathbf{L}}_i \Delta \hat{\mathbf{d}} - \Delta \bar{\mathbf{u}}) dS \right] + \\
& + \sum_{i=1}^{n_{el}} [\Phi_{(\Omega_{\varphi}-S)_i}(\Delta \hat{\mathbf{d}}, \Delta \tilde{\mathbf{d}}) + \Phi_{S_i}(\Delta \hat{\mathbf{d}}, \Delta \tilde{\mathbf{d}}) - \\
& - \int_{(\Omega_{\varphi}-S)_i} \Delta \mathbf{b}_i^T (\hat{\mathbf{N}}_i \hat{\mathbf{L}}_i \Delta \hat{\mathbf{d}} + \tilde{\mathbf{N}}_i \tilde{\mathbf{L}}_i \Delta \tilde{\mathbf{d}}) d\Omega - \\
& - \int_{\partial(\Omega_{\varphi}-S)_{q,i}} \Delta \mathbf{q}_i^T (\hat{\mathbf{N}}_i \hat{\mathbf{L}}_i \Delta \hat{\mathbf{d}} + \tilde{\mathbf{N}}_i \tilde{\mathbf{L}}_i \Delta \tilde{\mathbf{d}}) dS - \\
& - \left. \int_{\partial(\Omega_{\varphi}-S)_{u,i}} \Delta \mathbf{r}_i^T (\hat{\mathbf{N}}_i \hat{\mathbf{L}}_i \Delta \hat{\mathbf{d}} - \Delta \bar{\mathbf{u}}) dS \right] \left. \right\} \quad (3.8)
\end{aligned}$$

PO2  
Costitutivo continuo  
integro

dove

$$\begin{aligned}
\Phi_{(\Omega-\Omega_{\varphi})_i}(\Delta \hat{\mathbf{d}}) = & \sup_{(\Delta \sigma_i, \Delta \chi_i)} \inf_{\Delta \lambda_i \geq 0} \int_{(\Omega-\Omega_{\varphi})_i} [ -(\varphi'_{t,i}(\Delta \sigma_i) + \pi'_{t,i}(\Delta \chi_i)) - \\
& - \Delta \lambda_i \Delta g(\Delta \sigma_i, \Delta \chi_i) + \Delta \sigma_i^T \mathbf{C} \hat{\mathbf{N}}_i \hat{\mathbf{L}}_i \Delta \hat{\mathbf{d}} ] d\Omega \quad (3.9)
\end{aligned}$$

PO3  
Costitutivo continuo  
attraversato

$$\begin{aligned}
\Phi_{(\Omega_{\varphi}-S)_i}(\Delta \hat{\mathbf{d}}, \Delta \tilde{\mathbf{d}}) = & \sup_{(\Delta \sigma_i, \Delta \chi_i)} \inf_{\Delta \lambda_i \geq 0} \int_{(\Omega_{\varphi}-S)_i} [ -(\varphi'_{t,i}(\Delta \sigma_i) + \pi'_{t,i}(\Delta \chi_i)) - \\
& - \Delta \lambda_i \Delta g(\Delta \sigma_i, \Delta \chi_i) + \Delta \sigma_i^T \mathbf{C} (\hat{\mathbf{N}}_i \hat{\mathbf{L}}_i \Delta \hat{\mathbf{d}} + \tilde{\mathbf{N}}_i \tilde{\mathbf{L}}_i \Delta \tilde{\mathbf{d}}) ] d\Omega \quad (3.10)
\end{aligned}$$

PO4  
Costitutivo  
interfaccia



$$\Phi_{S_i}(\Delta \tilde{\mathbf{d}}) = \sup_{(\Delta \mathbf{t}_{S,i}, \Delta \chi_{S,i})} \inf_{\Delta \lambda_{S,i} \geq 0} \int_{S_i} [ -(\varphi'_{St,i}(\Delta \mathbf{t}_S) + \pi'_{St,i}(\Delta \chi_{S,i})) - \Delta \lambda_{S,i} \Delta g_S(\Delta \mathbf{t}_{S,i}, \Delta \chi_i) + \Delta \mathbf{t}_{S,i}^T \llbracket \tilde{\mathbf{N}} \rrbracket_i \tilde{\mathbf{L}}_i \Delta \tilde{\mathbf{d}} ] dS \quad (3.11)$$

La soluzione del problema di ottimizzazione PO1 (3.8) corrisponde al soddisfacimento delle equazioni di equilibrio nel continuo:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{n_{el}-n_\varphi} \left[ \int_{(\Omega-\Omega_\varphi)_i} \hat{\mathbf{L}}_i^T \hat{\mathbf{B}}_i^T \Delta \sigma_i(\Delta \hat{\mathbf{d}}) - \int_{(\Omega-\Omega_\varphi)_i} \hat{\mathbf{L}}_i^T \hat{\mathbf{N}}_i^T \Delta \mathbf{b}_i d\Omega - \right. \\ & \left. - \int_{\partial(\Omega-\Omega_\varphi)_{q,i}} \hat{\mathbf{L}}_i^T \hat{\mathbf{N}}_i^T \Delta \mathbf{q}_i dS - \int_{\partial(\Omega-\Omega_\varphi)_{u,i}} \hat{\mathbf{L}}_i^T \hat{\mathbf{N}}_i^T \Delta \mathbf{r}_i dS \right] + \\ & + \sum_{i=1}^{n_\varphi} \left[ \int_{(\Omega_\varphi-S)_i} \hat{\mathbf{L}}_i^T \hat{\mathbf{B}}_i^T \Delta \sigma_i(\Delta \hat{\mathbf{d}}, \Delta \tilde{\mathbf{d}}) - \int_{(\Omega_\varphi-S)_i} \hat{\mathbf{L}}_i^T \hat{\mathbf{N}}_i^T \Delta \mathbf{b}_i d\Omega - \right. \\ & \left. - \int_{\partial(\Omega_\varphi-S)_{q,i}} \hat{\mathbf{L}}_i^T \hat{\mathbf{N}}_i^T \Delta \mathbf{q}_i dS - \int_{\partial(\Omega_\varphi-S)_{u,i}} \hat{\mathbf{L}}_i^T \hat{\mathbf{N}}_i^T \Delta \mathbf{r}_i dS \right] = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.12a)$$

*EQ1a*  
Equazione di equilibrio del continuo

ed all'interfaccia:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{n_\varphi} \left[ \int_{(\Omega_\varphi-S)_i} \tilde{\mathbf{L}}_i^T \tilde{\mathbf{B}}_i^T \Delta \sigma_i(\Delta \hat{\mathbf{d}}, \Delta \tilde{\mathbf{d}}) + \right. \\ & \left. + \int_{S_i} \tilde{\mathbf{L}}_i^T \llbracket \tilde{\mathbf{N}} \rrbracket_i^T \Delta \mathbf{t}_{S,i}(\Delta \hat{\mathbf{d}}, \Delta \tilde{\mathbf{d}}) - \right. \\ & \left. - \int_{(\Omega_\varphi-S)_i} \tilde{\mathbf{L}}_i^T \tilde{\mathbf{N}}_i^T \Delta \mathbf{b}_i d\Omega - \int_{\partial(\Omega_\varphi-S)_{i,q}} \tilde{\mathbf{L}}_i^T \tilde{\mathbf{N}}_i^T \Delta \mathbf{q}_i dS \right] = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (3.12b)$$

*EQ1b*  
Equazione di equilibrio all'interfaccia

La soluzione dei problemi di ottimizzazione PO2 (3.9), PO3 (3.10) e PO4 (3.11) corrisponde al soddisfacimento delle equazioni costitutive in forma debole rispettivamente del continuo intero

$$\int_{(\Omega-\Omega_\varphi)_i} \hat{\mathbf{B}}_i \Delta \hat{\mathbf{d}}_i d\Omega = \int_{(\Omega-\Omega_\varphi)_i} \left( \mathbf{E}_i^{-1} \Delta \sigma_i + \Delta \lambda_i \frac{\partial g}{\partial \sigma} \right) d\Omega \quad (3.13a)$$

*EQ2*  
Equazioni costitutive del continuo intero

$$\int_{(\Omega-\Omega_\varphi)_i} \left( \mathbf{H}_i^{-1} \Delta \chi_i + \Delta \lambda_i \frac{\partial g}{\partial \chi} \right) d\Omega = \mathbf{0} \quad (3.13b)$$

$$\int_{(\Omega-\Omega_\varphi)_i} \Delta g(\sigma_i, \chi_i) d\Omega = 0 \quad (3.13c)$$

EQ3  
Equazioni  
costitutive del  
continuo  
attraversato

del continuo attraversato dall'interfaccia

$$\int_{(\Omega_\varphi-S)_i} \left( \hat{\mathbf{B}}_i \Delta \hat{\mathbf{d}}_i + \tilde{\mathbf{B}}_i \Delta \tilde{\mathbf{d}}_i \right) d\Omega = \int_{(\Omega_\varphi-S)_i} \left( \mathbf{E}_i^{-1} \Delta \sigma_i + \Delta \lambda_i \frac{\partial g}{\partial \sigma} \right) d\Omega \quad (3.14a)$$

$$\int_{(\Omega_\varphi-S)_i} \left( \mathbf{H}_i^{-1} \Delta \chi_i + \Delta \lambda_i \frac{\partial g}{\partial \chi} \right) d\Omega = \mathbf{0} \quad (3.14b)$$

$$\int_{(\Omega_\varphi-S)_i} \Delta g(\sigma_i, \chi_i) d\Omega = 0 \quad (3.14c)$$

EQ4  
Equazioni  
costitutive  
dell'interfaccia

e dell'interfaccia stessa

$$\int_{S_i} \llbracket \tilde{\mathbf{N}} \rrbracket_i \Delta \tilde{\mathbf{d}}_i dS = \int_{S_i} \left( \mathbf{E}_{S,i}^{-1} \Delta \mathbf{t}_{S,i} + \Delta \lambda_{S,i} \frac{\partial g_S}{\partial \mathbf{t}_S} \right) dS \quad (3.15a)$$

$$\int_{S_i} \left( \mathbf{H}_i^{-1} \Delta \chi_{S,i} + \Delta \lambda_{S,i} \frac{\partial g_S}{\partial \chi_S} \right) dS = \mathbf{0} \quad (3.15b)$$

$$\int_{S_i} \Delta g_S(\mathbf{t}_{S,i}, \chi_{S,i}) dS = 0 \quad (3.15c)$$

Condizione di  
consistenza rilassata

Sommando all'integranda che compare nelle equazioni (3.13) e (3.14) il termine  $g(\sigma, \chi)$  e ricordando la relazione (3.2), la condizione di consistenza in forma debole del continuo assume la forma

$$\int_{(\Omega_\varphi-S)_i} \underbrace{g(\sigma, \chi)}_{=0} + \left( \frac{\partial g}{\partial \sigma} \right)^T \Delta \sigma + \left( \frac{\partial g}{\partial \chi} \right)^T \Delta \chi d\Omega = 0$$

che rappresenta lo sviluppo in serie di Taylor arrestato al termine lineare della funzione di snervamento. Pertanto le equazioni (3.13) e (3.14) possono essere espresse in forma rilassata

$$\int_{(\Omega-\Omega_\varphi)_i} g(\sigma + \Delta \sigma, \chi + \Delta \chi) d\Omega = 0$$

$$\int_{(\Omega_\varphi - S)_i} g(\sigma + \Delta\sigma, \chi + \Delta\chi) d\Omega = 0.$$

Analogamente la relazione (3.15) assume la forma rilassata

$$\int_{S_i} g_S(\mathbf{t}_{S,i} + \Delta\mathbf{t}_{S,i}, \chi_{S,i} + \Delta\chi_{S,i}) dS = 0.$$

### 3.5 Strategia di soluzione

Al fine di risolvere il problema nell'ambito del metodo agli elementi finiti, sono state ricavate per via variazionale le forme deboli delle equazioni che governano il problema del solido elastoplastico attraversato da discontinuità forti.

Nei due sottoparagrafi che seguono è descritta la strategia adottata per risolvere le equazioni costitutive e le equazioni di equilibrio.

#### 3.5.1 Equazioni costitutive

L'integrale che compare nella forma debole della generica equazione costitutiva nel seguito sarà calcolato adottando la regola di quadratura di Gauss-Legendre. Tale operazione permette di risolvere la generica equazioni costitutiva in forma forte in corrispondenza dei punti di Gauss. Nel seguito si riporta la strategia di soluzione per le equazioni costitutive del continuo integro, del continuo attraversato e dell'interfaccia.

##### Equazioni costitutive del continuo integro

Gli integrali che compaiono nella forma debole (3.13) dell'equazione costitutiva del continuo sono computati numericamente attraverso la formula di quadratura di Gauss-Legendre:

*Formula di quadratura di Gauss-Legendre*

$$\int_{(\Omega - \Omega_\varphi)_i} f(x, y, z) d\Omega = \sum_i^{PG(\Omega - \Omega_\varphi)_i} f(x_i, y_i, z_i) w_i \quad (3.16)$$

dove  $f(x_i, y_i, z_i)$  sono i valori dell'integranda nei punti di Gauss e  $w_i$  sono i pesi. La generica equazione costitutiva diventa pertanto

$$\sum_i^{PG(\Omega - \Omega_\varphi)_i} f(x_i, y_i, z_i) w_i = 0,$$

relazione che risulta soddisfatta se ogni singolo addendo della sommatoria risulta nullo:

$$f(x_i, y_i, z_i) = 0.$$

Le equazioni costitutive del continuo integro pertanto vengono risolte in corrispondenza dei punti di Gauss del dominio del generico elemento finito non attraversato  $(\Omega - \Omega_\varphi)_i$ :

$$\hat{\mathbf{B}}_i \Delta \hat{\mathbf{d}}_i = \mathbf{E}_i^{-1} \Delta \sigma_i + \Delta \lambda_i \frac{\partial g}{\partial \sigma} \quad (3.17a)$$

$$\mathbf{H}_i^{-1} \Delta \chi_i + \Delta \lambda_i \frac{\partial g}{\partial \chi} = \mathbf{0} \quad (3.17b)$$

$$g(\sigma_i, \chi_i) = 0. \quad (3.17c)$$

Nelle Figure 3.9(a) e 3.9(b) sono rappresentati i punti di Gauss di elementi non attraversati dall'interfaccia rispettivamente nel caso di elemento bilineare a quattro nodi e di elemento biquadratico a otto/nove nodi.

### Equazioni costitutive del continuo attraversato

Le integrande che compaiono nella forma debole delle equazioni costitutive del continuo attraversato (3.14) risultano discontinue in corrispondenza dell'interfaccia  $S$ , a causa della presenza della matrice delle funzioni di forma  $\tilde{\mathbf{N}}$  singolari e della matrice delle loro derivate  $\tilde{\mathbf{B}}$ . Tali integrande risultano però continue e regolari all'interno dei sottodomini in cui  $\Omega_{\varphi i}$  risulta diviso dall'interfaccia. Gli integrali definiti sull'intero dominio del generico elemento finito attraversato vengono pertanto calcolati come la somma degli integrali sui sottodomini individuati dall'interfaccia:

$$\int_{\Omega_\varphi - S} f(x, y) d\Omega = \int_{\Omega_\varphi^+} f(x, y) d\Omega + \int_{\Omega_\varphi^-} f(x, y) d\Omega \quad (3.18)$$

Anche in questo caso gli integrali che compaiono nella (3.18) sono computati numericamente attraverso la formula di quadratura di Gauss-Legendre:

$$\int_{\Omega_\varphi^\pm} f(x, y, z) d\Omega = \sum_i^{PG_{\Omega_\varphi^\pm}} f(x_i, y_i, z_i) w_i$$

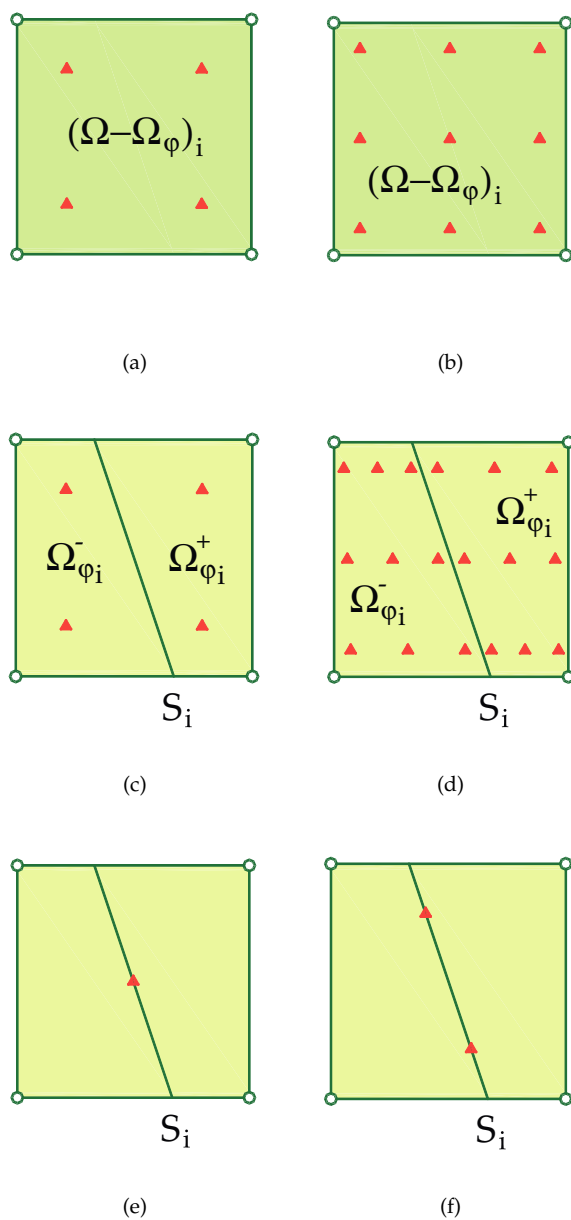


Figura 3.9: Punti di Gauss dei sottodomini  $\Omega_{\varphi_i}^+$  e  $\Omega_{\varphi_i}^-$  (a) e dell'interfaccia  $S$  per interpolazione del salto: (b) costante; (c) lineare.

$$\int_{\Omega_{\varphi}^-} f(x, y, z) d\Omega = \sum_i^{PG_{\Omega_{\varphi}^-}} f(x_i, y_i, z_i) w_i$$

dove  $f(x_i, y_i, z_i)$  sono i valori dell'integranda nei punti di Gauss del singolo sottodominio.

Le equazioni costitutive del continuo attraversato pertanto vengono risolte in corrispondenza dei punti di Gauss del dominio del generico elemento finito attraversato  $(\Omega_{\varphi} - S)_i$ , schematizzati in Figura 3.9(c) nel caso di salto costante ed elemento bilineare ed in Figura 3.9(d) nel caso di salto lineare ed elemento biquadratico:

$$\hat{\mathbf{B}}_i \Delta \hat{\mathbf{d}}_i + \tilde{\mathbf{B}}_i \Delta \tilde{\mathbf{d}}_i = \mathbf{E}_i^{-1} \Delta \sigma_i + \Delta \lambda_i \frac{\partial g}{\partial \sigma}$$

$$\mathbf{H}_i^{-1} \Delta \chi_i + \Delta \lambda_i \frac{\partial g}{\partial \chi} = \mathbf{0}$$

$$g(\sigma_i, \chi_i) = 0$$

### Equazioni costitutive dell'interfaccia

Anche nel caso dell'interfaccia gli integrali che compaiono nella forma debole (3.15) dell'equazione costitutiva sono computati numericamente attraverso la formula di quadratura di Gauss-Legendre (3.16). Pertanto le equazioni costitutive vengono risolte in corrispondenza dei punti di Gauss dell'interfaccia  $S_i$ :

$$[[\tilde{\mathbf{N}}]]_i \Delta \tilde{\mathbf{d}}_i = \mathbf{E}_{S,i}^{-1} \Delta \mathbf{t}_{S,i} + \Delta \lambda_{S,i} \frac{\partial g_S}{\partial \mathbf{t}_S}$$

$$\mathbf{H}_i^{-1} \Delta \chi_{S,i} + \Delta \lambda_{S,i} \frac{\partial g_S}{\partial \chi_S} = \mathbf{0}$$

$$g_S(\mathbf{t}_{S,i}, \chi_{S,i}) = 0.$$

### Soluzione delle equazioni costitutive

Al fine di risolvere i sistemi costitutivi non lineari si pongono le equazioni di tali sistemi in forma residuale:

- continuo integro

$$\mathbf{R}_{\sigma} = \hat{\mathbf{B}}_i \Delta \hat{\mathbf{d}}_i - \mathbf{E}_i^{-1} \Delta \sigma_i - \Delta \lambda_i \frac{\partial g}{\partial \sigma} \quad (3.19a)$$

$$\mathbf{R}_\chi = -\mathbf{H}_i^{-1} \Delta \chi_i - \Delta \lambda_i \frac{\partial g}{\partial \chi} \quad (3.19b)$$

$$R_\lambda = -g(\sigma_i, \chi_i) = 0 \quad (3.19c)$$

- continuo attraversato

$$\mathbf{R}_\sigma = \hat{\mathbf{B}}_i \Delta \hat{\mathbf{d}}_i + \tilde{\mathbf{B}}_i \Delta \tilde{\mathbf{d}}_i - \mathbf{E}_i^{-1} \Delta \sigma_i - \Delta \lambda_i \frac{\partial g}{\partial \sigma} \quad (3.20a)$$

$$\mathbf{R}_\chi = -\mathbf{H}_i^{-1} \Delta \chi_i - \Delta \lambda_i \frac{\partial g}{\partial \chi} \quad (3.20b)$$

$$R_\lambda = -g(\sigma_i, \chi_i) \quad (3.20c)$$

- interfaccia

$$\mathbf{R}_{\mathbf{t}_S} = [[\tilde{\mathbf{N}}]_i \Delta \tilde{\mathbf{d}}_i - \mathbf{E}_{S,i}^{-1} \Delta \mathbf{t}_{S,i} - \Delta \lambda_{S,i} \frac{\partial g_S}{\partial \mathbf{t}_S} \quad (3.21a)$$

$$\mathbf{R}_{\chi_{S,i}} = -\mathbf{H}_i^{-1} \Delta \chi_{S,i} - \Delta \lambda_{S,i} \frac{\partial g_S}{\partial \chi_{S,i}} \quad (3.21b)$$

$$R_{\lambda_S} = -g_S(\mathbf{t}_{S,i}, \chi_{S,i}). \quad (3.21c)$$

Dalle equazioni costitutive del continuo, che in forma residuale assumono l'espressione

$$\mathbf{R}_\sigma = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{R}_\chi = \mathbf{0}$$

$$R_\lambda = 0,$$

*Forma residuale  
delle equazioni  
costitutive*

si calcolano gli incrementi del vettore tensione  $\Delta \sigma_i$ , del vettore delle variabili statiche interne  $\Delta \chi_i$  e del moltiplicatore plastico  $\Delta \lambda_i$ , mentre dalle equazioni costitutive dell'interfaccia

$$\mathbf{R}_{\mathbf{t}_S} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{R}_{\chi_{S,i}} = \mathbf{0}$$

$$R_{\lambda_S} = 0.$$

si calcolano gli incrementi del vettore tensione  $\Delta \mathbf{t}_{S,i}$ , del vettore delle variabili statiche interne  $\Delta \chi_{S,i}$  e del moltiplicatore plastico  $\Delta \lambda_{S,i}$ .

La soluzione viene cercata con il metodo iterativo di Newton-Raphson,

*Metodo iterativo di  
Newton-Raphson*

la cui generica iterazione prevede, nel caso del continuo, il calcolo degli incrementi dei vettori  $\Delta\sigma_i$ ,  $\Delta\chi_i$  e dello scalare  $\Delta\lambda_i$ :

$$\begin{bmatrix} d\sigma_i \\ d\chi_i \\ d\lambda_i \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_i^{-1} + \Delta\lambda_i \frac{\partial^2 g}{\partial \sigma^2} & \Delta\lambda_i \left( \frac{\partial^2 g}{\partial \sigma \chi} \right)^T & \left( \frac{\partial g}{\partial \sigma} \right)^T \\ \Delta\lambda_i \frac{\partial^2 g}{\partial \chi \sigma} & \mathbf{H}_i^{-1} + \Delta\lambda_i \frac{\partial^2 g}{\partial \chi^2} & \left( \frac{\partial g}{\partial \chi} \right)^T \\ \frac{\partial g}{\partial \sigma} & \frac{\partial g}{\partial \chi} & 0 \end{bmatrix}_k^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_\sigma \\ \mathbf{R}_\chi \\ R_\lambda \end{bmatrix}_k$$

dove  $\mathbf{R}_\sigma$  è dato dalle equazioni (3.19a) e (3.20a) rispettivamente nel caso di continuo integro e continuo attraversato.

Nel caso dell'interfaccia invece si calcolano gli incrementi dei vettori  $\Delta\mathbf{t}_{S,i}$ ,  $\Delta\chi_{S,i}$  e dello scalare  $\Delta\lambda_{S,i}$  con una relazione analoga alla precedente:

$$\begin{bmatrix} d\mathbf{t}_{S,i} \\ d\chi_{S,i} \\ d\lambda_{S,i} \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{S,i}^{-1} + \Delta\lambda_{S,i} \frac{\partial^2 g_S}{\partial \mathbf{t}_S^2} & \Delta\lambda_{S,i} \left( \frac{\partial^2 g_S}{\partial \mathbf{t}_S \chi_S} \right)^T & \left( \frac{\partial g_S}{\partial \mathbf{t}_S} \right)^T \\ \Delta\lambda_{S,i} \frac{\partial^2 g_S}{\partial \chi_S \mathbf{t}_S} & \mathbf{H}_{S,i}^{-1} + \Delta\lambda_{S,i} \frac{\partial^2 g_S}{\partial \chi_S^2} & \left( \frac{\partial g_S}{\partial \chi_S} \right)^T \\ \frac{\partial g_S}{\partial \mathbf{t}_S} & \frac{\partial g_S}{\partial \chi_S} & 0 \end{bmatrix}_k^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{\mathbf{t}_S} \\ \mathbf{R}_{\chi_S} \\ R_{\lambda_S} \end{bmatrix}_k$$

Matrici costitutive  
algoritmiche

Una volta risolto il sistema di equazioni costitutive, vengono ricavate le matrici costitutive algoritmiche del continuo e dell'interfaccia, corrispettive discrete delle matrici elastoplastiche definite dalle equazioni (2.34) e (2.51), rispettivamente definite dalle relazioni [61]:

$$\mathbf{E}_{alg,i} = \frac{\partial \Delta\sigma_i}{\partial \Delta\varepsilon_i} = \left[ \mathbf{E}_i^{-1} + \Delta\lambda_i \frac{\partial^2 g}{\partial \sigma^2} \right]^{-1}$$

$$\mathbf{E}_{S,alg,i} = \frac{\partial \Delta\mathbf{t}_{S,i}}{\partial \Delta[\mathbf{u}]_{S,i}} = \left[ \mathbf{E}_{S,i}^{-1} + \Delta\lambda_{S,i} \frac{\partial^2 g_S}{\partial \mathbf{t}_S^2} \right]^{-1}$$

Dette matrici permettono di esprimere l'incremento del vettore tensione in funzione dell'incremento del vettore deformazione totale:

$$\Delta\sigma_i = \mathbf{E}_{alg,i} \Delta\varepsilon_i \quad (3.22)$$



e l'incremento del vettore delle trazioni all'interfaccia in funzione dell'incremento del vettore  $[[\mathbf{u}]]_{S,i}$ :

$$\Delta \mathbf{t}_{S,i} = \mathbf{E}_{S,alg,i} \Delta [[\mathbf{u}]]_{S,i}. \quad (3.23)$$

### Ipotesi di continuo elastico e interfaccia puramente dissipativa

Nel seguito si assumerà comportamento elastico lineare per il continuo ( $\varepsilon_p = 0$ ) e puramente dissipativo per l'interfaccia ( $[[\mathbf{u}]]_{S,e} = 0$ ). Sotto tali ipotesi le equazioni costitutive assumono le espressioni:

- del continuo integro

$$\Delta \sigma_i = \mathbf{E}_i \hat{\mathbf{B}}_i \Delta \hat{\mathbf{d}}_i$$

- del continuo attraversato

$$\Delta \sigma_i = \mathbf{E}_i \left( \hat{\mathbf{B}}_i \Delta \hat{\mathbf{d}}_i + \tilde{\mathbf{B}}_i \Delta \tilde{\mathbf{d}}_i \right)$$

- dell'interfaccia

$$[[\tilde{\mathbf{N}}]]_i \Delta \tilde{\mathbf{d}}_i = \Delta \lambda_{S,i} \frac{\partial g_S}{\partial \mathbf{t}_S}$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{H}_i^{-1} \Delta \chi_{S,i} + \Delta \lambda_{S,i} \frac{\partial g_S}{\partial \chi_S}$$

$$0 = g_S(\mathbf{t}_{S,i}, \chi_{S,i}).$$

La matrice algoritmica  $\mathbf{E}_{alg,i}$  del continuo (integro ed attraversato) coincide con la matrice costitutiva elastica  $\mathbf{E}_i$ , mentre gli elementi della matrice algoritmica  $\mathbf{E}_{S,alg,i}$  dell'interfaccia tende all'infinito. Il vettore delle tensioni sull'interfaccia risulta indeterminato dall'equazione costitutiva (3.23):

$$\underbrace{\Delta \mathbf{t}_{S,i}}_? = \underbrace{\mathbf{E}_{S,alg,i}}_\infty \underbrace{\Delta [[\mathbf{u}]]_{S,i}}_0$$

e deve essere determinato dall'equazione di equilibrio all'interfaccia.

### 3.5.2 Equazioni di equilibrio

Sostituendo le relazioni (3.22) e (3.23), l'equazione (3.12a) di equilibrio del continuo, scritta a livello globale, e l'equazione (3.12b) di equilibrio

all'interfaccia di ogni singolo elemento finito attraversato, assumono rispettivamente la forma

$$\sum_{i=1}^{n_{el}} \left[ \hat{\mathbf{L}}_i^T \mathbf{K}_{\hat{d}\hat{d},i} \hat{\mathbf{L}}_i \right] \Delta \hat{\mathbf{d}} + \sum_{i=1}^{n_{\varphi}} \left[ \hat{\mathbf{L}}_i^T \mathbf{K}_{\hat{d}\tilde{d},i} \tilde{\mathbf{L}}_i \right] \Delta \tilde{\mathbf{d}} = \sum_{i=1}^{n_{el}} \left[ \hat{\mathbf{L}}_i^T \Delta \mathbf{F}_{\hat{d},i} \right] \quad (3.24a)$$

$$\sum_{i=1}^{n_{\varphi}} \left[ \tilde{\mathbf{L}}_i^T \mathbf{K}_{\tilde{d}\hat{d},i} \hat{\mathbf{L}}_i \right] \Delta \hat{\mathbf{d}} + \sum_{i=1}^{n_{\varphi}} \left[ \tilde{\mathbf{L}}_i^T \left( \mathbf{K}_{\tilde{d}\tilde{d},i} + \mathbf{K}_{S,i} \right) \tilde{\mathbf{L}}_i \right] \Delta \tilde{\mathbf{d}} = \sum_{i=1}^{n_{\varphi}} \left[ \tilde{\mathbf{L}}_i^T \Delta \mathbf{F}_{\tilde{d},i} \right], \quad (3.24b)$$

Matrice di rigidezza  
elementare

avendo definito la matrice di rigidezza tangente del generico elemento integro

$$\mathbf{K}_{\hat{d}\hat{d},i} = \int_{\Omega_i} \hat{\mathbf{B}}_i^T \mathbf{E}_{alg,i} \hat{\mathbf{B}}_i d\Omega, \quad (3.25a)$$

la matrice di rigidezza tangente mista  $\hat{d}/\tilde{d}$  del generico elemento attraversato

$$\mathbf{K}_{\hat{d}\tilde{d},i} = \int_{(\Omega_{\varphi}-S)_i} \tilde{\mathbf{B}}_i^T \mathbf{E}_{alg,i} \hat{\mathbf{B}}_i d\Omega, \quad (3.25b)$$

$$\mathbf{K}_{\tilde{d}\hat{d},i} = \mathbf{K}_{\hat{d}\tilde{d},i}^T \quad (3.25c)$$

la matrice di rigidezza tangente  $\tilde{d}/\tilde{d}$  del generico elemento attraversato

$$\mathbf{K}_{\tilde{d}\tilde{d},i} = \int_{(\Omega_{\varphi}-S)_i} \tilde{\mathbf{B}}_i^T \mathbf{E}_{alg,i} \tilde{\mathbf{B}}_i d\Omega, \quad (3.25d)$$

la matrice di rigidezza tangente dell'interfaccia

$$\mathbf{K}_{S,i} = \int_{S_i} [\tilde{\mathbf{N}}]_i^T \mathbf{E}_{S,alg,i} [\tilde{\mathbf{N}}]_i dS,$$

Vettore delle forze  
nodali equivalenti  
elementare

ed i vettori delle forze nodali equivalenti ai carichi di volume e di superficie relativi al generico elemento integro

$$\Delta \mathbf{F}_{\hat{d},i} = \int_{\Omega_i} \hat{\mathbf{N}}_i^T \Delta \mathbf{b}_i d\Omega + \int_{\partial\Omega_{q,i}} \hat{\mathbf{N}}_i^T \Delta \mathbf{q}_i + \int_{\partial\Omega_{u,i}} \hat{\mathbf{N}}_i^T \Delta \mathbf{r}_i dS \quad (3.26)$$

ed attraversato dall'interfaccia

$$\Delta \mathbf{F}_{\tilde{d},i} = \int_{(\Omega_{\varphi}-S)_i} \tilde{\mathbf{N}}_i^T \Delta \mathbf{b}_i d\Omega + \int_{\partial(\Omega_{\varphi}-S)_{iq}} \tilde{\mathbf{N}}_i^T \Delta \mathbf{q}_i dS \quad (3.27)$$

Al fine di risolvere il sistema di equazioni di equilibrio non lineari si pongono le (3.24) in forma residuale:

$$\mathbf{R}_{\hat{d}} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{R}_{\tilde{d}} = \mathbf{0}$$

dove

$$\mathbf{R}_{\hat{d}} = \mathbf{K}_{\hat{d}\hat{d}}\Delta\hat{\mathbf{d}} + \mathbf{K}_{\hat{d}\tilde{d}}\Delta\tilde{\mathbf{d}} - \Delta\mathbf{F}_{\hat{d}} \quad (3.28a)$$

$$\mathbf{R}_{\tilde{d}} = \mathbf{K}_{\tilde{d}\hat{d}}\Delta\hat{\mathbf{d}} + (\mathbf{K}_{\tilde{d}\tilde{d}} + \mathbf{K}_S)\Delta\tilde{\mathbf{d}} - \Delta\mathbf{F}_{\tilde{d}}, \quad (3.28b)$$

avendo definito la matrice di rigidezza tangente globale del sistema del continuo integro

$$\mathbf{K}_{\hat{d}\hat{d}} = \sum_{i=1}^{n_{el}} \left[ \hat{\mathbf{L}}_i^T \mathbf{K}_{\hat{d}\hat{d},i} \hat{\mathbf{L}}_i \right]$$

la matrice di rigidezza tangente globale mista del continuo attraversato/integro

$$\mathbf{K}_{\hat{d}\tilde{d}} = \sum_{i=1}^{n_{\varphi}} \left[ \hat{\mathbf{L}}_i^T \mathbf{K}_{\hat{d}\tilde{d},i} \tilde{\mathbf{L}}_i \right]$$

$$\mathbf{K}_{\tilde{d}\hat{d}} = \mathbf{K}_{\hat{d}\tilde{d}}^T$$

la matrice di rigidezza tangente globale del continuo attraversato

$$\mathbf{K}_{\tilde{d}\tilde{d}} = \sum_{i=1}^{n_{\varphi}} \left[ \tilde{\mathbf{L}}_i^T \mathbf{K}_{\tilde{d}\tilde{d},i} \tilde{\mathbf{L}}_i \right]$$

la matrice di rigidezza tangente globale della interfaccia

$$\mathbf{K}_S = \sum_{i=1}^{n_{\varphi}} \left[ \tilde{\mathbf{L}}_i^T \mathbf{K}_{S,i} \tilde{\mathbf{L}}_i \right]$$

ed i vettori globali del sistema delle forze nodali equivalenti a forze di volume di superficie

$$\Delta\mathbf{F}_{\hat{d}} = \sum_{i=1}^{n_{el}} \left[ \hat{\mathbf{L}}_i^T \Delta\mathbf{F}_{\hat{d},i} \right]$$

$$\Delta\mathbf{F}_{\tilde{d}} = \sum_{i=1}^{n_{\varphi}} \left[ \tilde{\mathbf{L}}_i^T \Delta\mathbf{F}_{\tilde{d},i} \right].$$

*Forma residuale  
delle equazioni di  
equilibrio*

*Matrice di rigidezza  
globale*

*Vettore delle forze  
globale*

Dalla (3.28) si evince che la formulazione sviluppata è simmetrica.

La soluzione viene cercata con il metodo iterativo di Newton-Raphson, la cui generica iterazione prevede il calcolo degli incrementi dei vettori  $\Delta\hat{\mathbf{d}}$  e  $\Delta\tilde{\mathbf{d}}$ :

$$\begin{bmatrix} d\hat{\mathbf{d}} \\ d\tilde{\mathbf{d}} \end{bmatrix}_{g+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\hat{\mathbf{d}}\hat{\mathbf{d}}} & \mathbf{K}_{\hat{\mathbf{d}}\tilde{\mathbf{d}}} \\ \mathbf{K}_{\tilde{\mathbf{d}}\hat{\mathbf{d}}} & \mathbf{K}_{\tilde{\mathbf{d}}\tilde{\mathbf{d}}} + \mathbf{K}_S \end{bmatrix}_g^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{\hat{\mathbf{d}}} \\ \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{d}}} \end{bmatrix}_g$$

### 3.5.3 Ipotesi di discontinuità immerse

Nelle equazioni (3.24) i gradi di libertà raccolti nel vettore  $\tilde{\mathbf{d}}$  sono globali. Pertanto al crescere del numero  $n_\varphi$  di elementi attraversati dall'interfaccia, la dimensione del problema di equilibrio (3.24) cresce.

Nel seguito, attraverso una scelta opportuna delle matrici di connettività nodale  $\tilde{\mathbf{L}}_i$  che compaiono nell'equazione di equilibrio all'interfaccia, i gradi di libertà aggiuntivi  $\tilde{\mathbf{d}}_i$  corrispondenti alle funzioni di forma singolari saranno considerati a livello del singolo elemento finito. Si ricade così nell'ipotesi di elementi con discontinuità immerse (EED), nell'ambito della quale il numero dei gradi libertà globali del sistema rimane inalterato al propagarsi dell'interfaccia e l'equazione (3.12b) di equilibrio all'interfaccia assume carattere locale:

$$\begin{aligned} & \int_{(\Omega_\varphi - S)_i} \tilde{\mathbf{B}}_i^T \Delta\sigma_i(\Delta\hat{\mathbf{d}}, \Delta\tilde{\mathbf{d}}_i) d\Omega + \int_{S_i} \llbracket \tilde{\mathbf{N}} \rrbracket_i^T \Delta\mathbf{t}_{S,i}(\Delta\hat{\mathbf{d}}, \Delta\tilde{\mathbf{d}}_i) dS - \\ & - \int_{(\Omega_\varphi - S)_i} \tilde{\mathbf{N}}_i^T \Delta\mathbf{b}_i d\Omega - \int_{\partial(\Omega_\varphi - S)_{i,q}} \tilde{\mathbf{N}}_i^T \Delta\mathbf{q}_i dS = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

*Interfaccia  
elastoplastica*

Tale espressione può essere particolarizzata sostituendo le equazioni costitutive del continuo e dell'interfaccia. Nel caso di continuo elastoplastico ed interfaccia elastoplastica, sostituendo rispettivamente le relazioni (3.22) e (3.23), si ottiene

$$\left[ \mathbf{K}_{\tilde{\mathbf{d}}\tilde{\mathbf{d}},i} + \mathbf{K}_{S,i} \right] \Delta\tilde{\mathbf{d}}_i = -\mathbf{K}_{\tilde{\mathbf{d}}\hat{\mathbf{d}},i} \Delta\hat{\mathbf{d}}_i + \Delta\mathbf{F}_{\tilde{\mathbf{d}},i}, \quad i = 1, \dots, n_\varphi,$$

*Interfaccia  
rigidoplastica*

Nel caso di comportamento elastico lineare del continuo e interfaccia rigido plastica l'equazione di equilibrio all'interfaccia (3.29) diventa invece

$$\mathbf{K}_{\tilde{\mathbf{d}}\tilde{\mathbf{d}},i} \Delta\tilde{\mathbf{d}}_i + \int_{S_i} \llbracket \tilde{\mathbf{N}} \rrbracket_i^T \Delta\mathbf{t}_{S,i} dS = -\mathbf{K}_{\tilde{\mathbf{d}}\hat{\mathbf{d}},i} \Delta\hat{\mathbf{d}}_i + \Delta\mathbf{F}_{\tilde{\mathbf{d}},i}, \quad i = 1, \dots, n_\varphi,$$

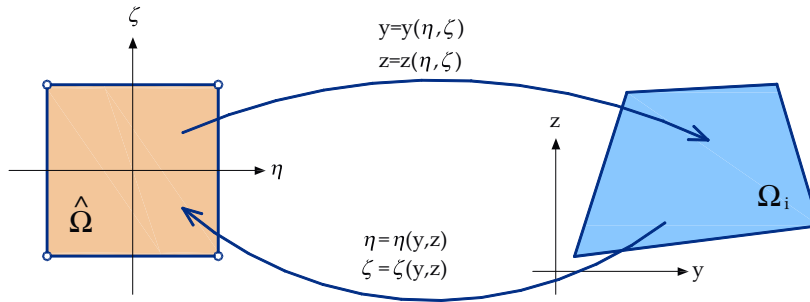


Figura 3.10: Elemento finito integro: trasformazione tra elemento master in coordinate intrinseche e elemento in coordinate geometriche.

dove l'integrale è calcolato con la formula di quadratura di Gauss-Legendre.

L'equazione di equilibrio globale del continuo assume pertanto la forma

$$\mathbf{K}_{\hat{d}\hat{d}} \Delta \hat{\mathbf{d}} = \Delta \mathbf{F}_{\hat{d}} - \sum_{i=1}^{n_\varphi} \left[ \hat{\mathbf{L}}_i^T \mathbf{K}_{\hat{d}\tilde{d},i} \Delta \tilde{\mathbf{d}}_i \right] \quad (3.30)$$

dove il termine  $\hat{\mathbf{L}}_i^T \mathbf{K}_{\hat{d}\tilde{d},i} \Delta \tilde{\mathbf{d}}_i$  dell'equazione (3.30) rappresenta le forze equivalenti dovute agli spostamenti  $\Delta \tilde{\mathbf{d}}_i$ , calcolati dall'equazione (3.29).

### 3.5.4 Integrazione delle matrici di rigidezza

In questo paragrafo vengono descritte la modalità di integrazione per il calcolo della matrice di rigidezza degli elementi attraversati dall'interfaccia, evidenziandone le differenze rispetto alla modalità utilizzata per l'integrazione di elementi integri.

#### Elementi integri

L'integrale che compare nell'espressione (3.25) della matrice di rigidezza del generico elemento integro  $\Omega_i$  è calcolato numericamente attraverso la formula di quadratura di Gauss-Legendre.

Risulta conveniente computare tale integrale riferendosi ad un elemento  $\hat{\Omega}_i$  quadrato di lato pari a 2, chiamato *elemento master* (Figura 3.10).

Ogni elemento integro viene trasformato in un elemento master attraverso la trasformazione di coordinate

$$\mathbf{X}_i = \hat{\mathbf{N}}_i(\eta, \zeta) \mathbf{x}_i \quad (3.31)$$

dove  $\hat{\mathbf{N}}_i(\eta, \zeta)$  sono le funzione di forma nel sistema di riferimento intrinseco  $(\eta, \zeta)$  dell'elemento master e  $\mathbf{x}_i$  sono le coordinate dei vertici del quadrilatero nel sistema di riferimento geometrico  $(y, z)$  dell'elemento originario. Le funzioni di forma che compaiono nella (3.31), utilizzate per approssimare la geometria del dominio, sono le stesse già utilizzate per interpolare il campo di spostamenti all'interno dell'elemento integro, che viene perciò definito isoparametrico.

A seguito della trasformazione di coordinate definita dall'equazione (3.31) l'integrale che compare nella relazione diventa:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{\hat{d}\hat{d},i} &= \int_{\hat{\Omega}_i} \hat{\mathbf{B}}_i^T(\eta, \zeta) \mathbf{E}_{alg,i}(\eta, \zeta) \hat{\mathbf{B}}_i(\eta, \zeta) J(\eta, \zeta) d\hat{\Omega} = \\ &= \sum_{j=1}^{N_{PG_\eta}} \sum_{l=1}^{N_{PG_\zeta}} w_j w_l \hat{\mathbf{B}}_i^T(\eta_j, \zeta_l) \mathbf{E}_{alg,i}(\eta_j, \zeta_l) \hat{\mathbf{B}}_i(\eta_j, \zeta_l) J(\eta_j, \zeta_l) d\hat{\Omega} \end{aligned}$$

dove  $N_{PG_\eta}$  e  $N_{PG_\zeta}$  sono i punti di Gauss rispettivamente in direzione  $\eta$  e  $\zeta$ ,  $w_j$  e  $w_l$  sono i relativi pesi e  $J$  è il determinante della matrice Jacobiana della trasformazione (3.31):

$$\mathbf{J}(\eta, \zeta) = \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix}$$

La matrice  $\hat{\mathbf{B}}_i^T(\eta, \zeta)$  contiene le derivate delle funzioni di forma rispetto al sistema di riferimento  $(y,z)$  scritte in funzione delle variabili  $(\eta, \zeta)$ , ottenute attraverso la relazione:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial \zeta}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial z} & \frac{\partial \zeta}{\partial z} \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}^{-1}} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{bmatrix}$$

Per gli elementi quadrangolari bilineari a quattro nodi e biquadratici a otto/nove nodi, le integrande che compaiono nella matrice di rigidezza sono dei polinomi.

Nella Figura 3.11 è riportato il massimo grado del polinomio da integrare per il calcolo della matrice di rigidezza, il numero  $r$  di punti di

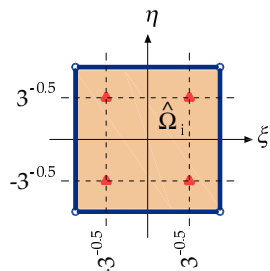
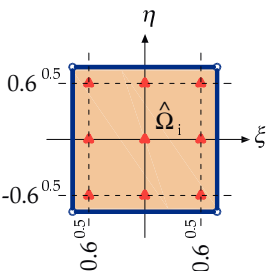
Tipo elemento	Lineare (r=1)	Quadratico (r=2)
Massimo grado del polinomio	2	4
Ordine di integrazione	2x2	3x3
Posizione dei punti di integrazione nell'elemento master		

Figura 3.11: Ordine di integrazione e ubicazione dei punti di Gauss per elementi lineari e quadratici.

Gauss da utilizzare per integrare correttamente il polinomio (pari alla parte intera di  $(p + 1)/2$ ), e la rispettiva posizione all'interno dell'elemento master per gli elementi bilineari a quattro nodi e per gli elementi biquadratici a otto/nove nodi.

### Elementi attraversati

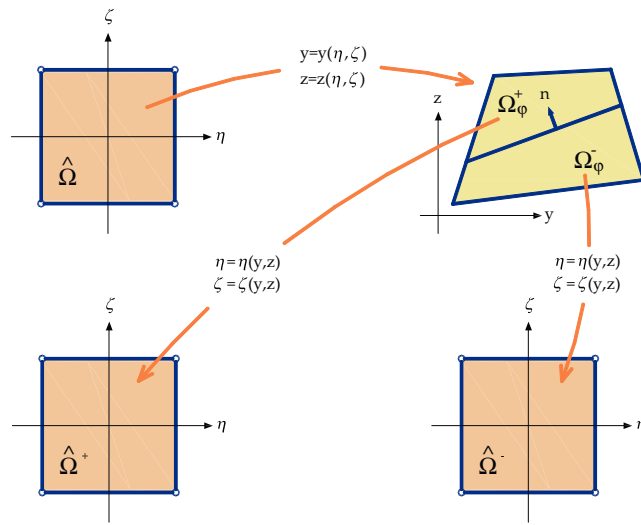
Anche in questo caso gli integrali che compaiono nelle relazioni che definiscono la matrice di rigidezza degli elementi attraversati sono calcolati numericamente attraverso la formula di quadratura di Gauss-Legendre.

Nel caso di salto costante le integrande che compaiono in risultano continue e perciò l'integrazione della matrice di rigidezza avviene in maniera standard, come illustrato per gli elementi integri. Nel caso di interpolazione lineare del salto, le integrande che compaiono in si presentano discontinue in corrispondenza dell'interfaccia  $S_i$ . Tali integrali sono allora calcolati come la somma degli integrali sui sottodomini individuati dall'interfaccia, riferendosi a due elementi master (Figura 3.12), rispettivamente relativi ai sottodomini  $\hat{\Omega}_{\varphi,i}^+$  e  $\hat{\Omega}_{\varphi,i}^-$ . A seguito delle trasformazioni di coordinate, analoghe a quelle definite in (3.31), gli integrali che compaiono nelle relazioni diventano:

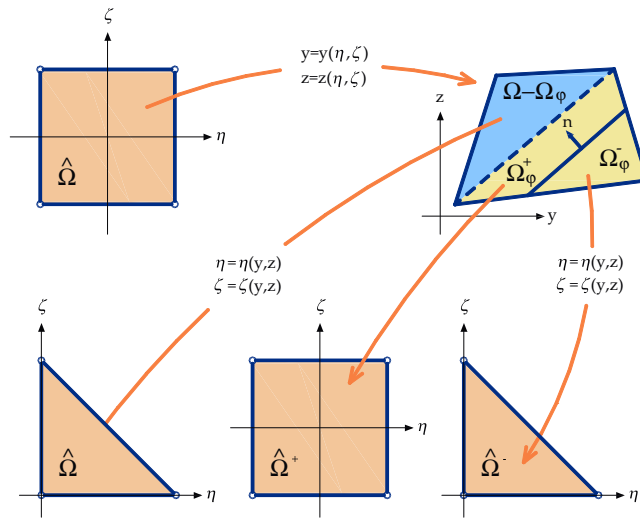
$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_{\hat{d}\hat{d},i} &= \int_{\hat{\Omega}_{\varphi,i}^+} \tilde{\mathbf{B}}_i^T(\eta, \zeta) \mathbf{E}_{alg,i}(\eta, \zeta) \hat{\mathbf{B}}_i(\eta, \zeta) J(\eta, \zeta) d\hat{\Omega} + \\
&+ \int_{\hat{\Omega}_{\varphi,i}^-} \tilde{\mathbf{B}}_i^T(\eta, \zeta) \mathbf{E}_{alg,i}(\eta, \zeta) \hat{\mathbf{B}}_i(\eta, \zeta) J(\eta, \zeta) d\hat{\Omega} = \\
&= \left[ \sum_{j=1}^{N_{PG_\eta}} \sum_{l=1}^{N_{PG_\zeta}} w_j w_l \tilde{\mathbf{B}}_i^T(\eta_j, \zeta_l) \mathbf{E}_{alg,i}(\eta_j, \zeta_l) \hat{\mathbf{B}}_i(\eta_j, \zeta_l) J(\eta_j, \zeta_l) d\hat{\Omega} \right]_{\hat{\Omega}_{\varphi,i}^+} \\
&+ \left[ \sum_{j=1}^{N_{PG_\eta}} \sum_{l=1}^{N_{PG_\zeta}} w_j w_l \tilde{\mathbf{B}}_i^T(\eta_j, \zeta_l) \mathbf{E}_{alg,i}(\eta_j, \zeta_l) \hat{\mathbf{B}}_i(\eta_j, \zeta_l) J(\eta_j, \zeta_l) d\hat{\Omega} \right]_{\hat{\Omega}_{\varphi,i}^-}
\end{aligned} \tag{3.32}$$

dove  $N_{PG_\eta}$  e  $N_{PG_\zeta}$  sono i punti di Gauss rispettivamente in direzione  $\eta$  e  $\zeta$ ,  $w_j$  e  $w_l$  sono i relativi pesi e  $J$  è il determinante della matrice Jacobiana, dei rispettivi sottodomini  $\hat{\Omega}_{\varphi,i}^+$  e  $\hat{\Omega}_{\varphi,i}^-$ .





(a)



(b)

Figura 3.12: Elemento finito attraversato: trasformazione tra elemento master ed elemento in coordinate geometriche. (a) sottodomini quadrangolari e (b) sottodomini triangolari.

La matrice  $\hat{\mathbf{B}}_i$  contiene le derivate delle funzioni di forma regolari dell'intero dominio  $\Omega_{\varphi_i}$  rispetto al sistema di riferimento  $(y,z)$ , scritte in funzione delle variabili  $(\eta, \zeta)$ , nella quale compare lo Jacobiano della trasformazione tra l'elemento master  $\hat{\Omega}$  ed l'intero dominio  $\Omega_{\varphi_i}$ .

La matrice  $\tilde{\mathbf{B}}_i$  contiene le derivate delle funzioni di forma singolari, ottenute da quelle regolari attraverso le relazioni descritte nel paragrafo 3.3.

Note le matrici  $\hat{\mathbf{B}}_i$  e  $\tilde{\mathbf{B}}_i$  si procede al calcolo degli integrali attraverso la (3.32), facendo riferimento agli elementi master dei due sottodomini.

Per quanto detto si rende perciò necessaria una doppia mappatura dell'elemento attraversato: la prima trasformazione, tra l'elemento master  $\hat{\Omega}$  in coordinate intrinseche e l'intero elemento nel riferimento geometrico, è necessaria per il calcolo delle funzioni di forma e delle sue derivate; le ulteriori trasformazioni, utili al fine del calcolo degli integrali che compaiono in (3.32), avvengono tra i due sottodomini  $\Omega_{\varphi_i}^+$  e  $\Omega_{\varphi_i}^-$  ed i relativi elementi master  $\hat{\Omega}^+$  e  $\hat{\Omega}^-$ .

Anche in questo caso le integrande che compaiono nella matrice di rigidezza sono dei polinomi. Il grado massimo del polinomio da integrare risulta pari a quattro nel caso di elementi biquadratici a otto/nove nodi con salto lineare. Il numero di punti di Gauss da utilizzare per ciascun sottodominio è pari a quello utilizzato per l'elemento biquadratico non attraversato (Figura 3.11).

Nei casi 1, 3, 4 e 6 (vedi paragrafo 3.3) gli estremi dell'interfaccia ricadono su due lati adiacenti dell'elemento, che risulta suddiviso in due sottodomini triangolari ed in un sottodominio rettangolare. Le trasformazioni utili al fine del calcolo degli integrali (che questa volta sono dati dalla somma di tre contributi), avvengono tra i tre sottodomini ed i relativi elementi master (Figura 3.12(b)).

Il numero di punti di Gauss da utilizzare per ciascun sottodominio triangolare è riportato in Figura 3.13 per i casi di elemento bilineare a quattro nodi con salto costante ed elemento biquadratico a otto/nove nodi con salto lineare.

### Interfaccia

Ancora una volta l'integrale che compare nell'espressione della matrice di rigidezza dell'interfaccia è calcolato numericamente attraverso la formula di quadratura di Gauss-Legendre, riferendosi ad un elemento master di lunghezza pari a 2 (Figura 3.14).

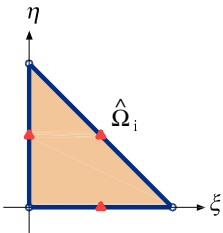
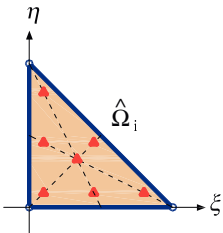
Tipo elemento	Lineare (r=1)	Quadratico (r=2)
Massimo grado del polinomio	2	5
Punti di integrazione	2x2	3x3
Posizione dei punti di integrazione nell'elemento master		

Figura 3.13: Discretizzazione della geometria: elementi interi ed attraversati dall'interfaccia.



Figura 3.14: Intefaccia: trasformazione tra elemento master ed elemento in coordinate geometriche.

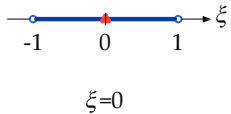
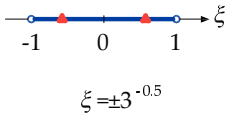
Tipo elemento	Salto costante ( $r=0$ )	Salto lineare ( $r=1$ )
Massimo grado del polinomio	0	1
Punti di integrazione	1	2
Posizione dei punti di integrazione nell'elemento master	 $\xi=0$	 $\xi = \pm 3^{-0.5}$

Figura 3.15: Ordine di integrazione e ubicazione dei punti di Gauss dell'interfaccia.

Per calcolare la matrice di rigidezza occorre integrare dei polinomi, il cui grado risulta nullo nel caso salto costante, e pari a uno nel caso di salto lineare.

Il numero di punti di Gauss da utilizzare e la relativa posizione sono riportati in Figura 3.15.

### 3.6 Algoritmo di soluzione

La risposta del modello strutturale soggetto ad una certa storia di carico viene valutata attraverso una procedura incrementale-iterativa.

Il modo più naturale per effettuare un'analisi incrementale consiste nel prescrivere i carichi esterni agenti sulla struttura alla fine di ogni passo (analisi a *controllo di carico*). L'obiettivo è trovare gli spostamenti nodali corrispondenti in modo che le equazioni di equilibrio risultino soddisfatte.

*Analisi a controllo di carico*

Tale strategia di soluzione fallisce se il carico prescritto non può essere equilibrato poichè la struttura non è capace di mobilitare ulteriori risorse di resistenza, e pertanto non risulta idonea a valutare il tratto post picco del diagramma carico/spostamento (Figura 3.16).

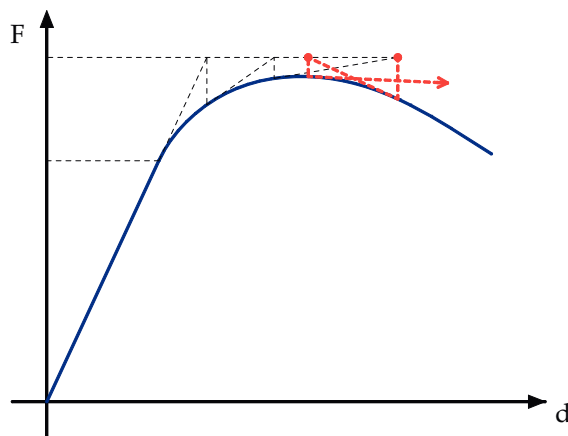


Figura 3.16: Non convergenza dell'algoritmo di soluzione a controllo di carico.

In tali situazioni si assegnano gli incrementi di spostamento. Poichè i valori degli spostamenti sono imposti direttamente, detta tecnica, nel seguito adottata, è nota come analisi a *controllo di spostamento diretto*.

*Analisi a controllo di spostamento*

Gli spostamenti impressi vengono applicati in un numero  $N$  di passi, detti incrementi, e la risposta della struttura alla fine di ogni passo viene calcolata dalle equazioni di equilibrio. Poichè dette equazioni sono in generale non lineari, si deve ricorrere a metodi iterativi, come il metodo di Newton-Raphson. Ciò implica che all'interno del ciclo relativo agli incrementi di carico, si ha un processo iterativo che opera all'interno del generico passo di carico, al fine di calcolare i vettori degli spostamenti  $\hat{\mathbf{d}}$  e  $\tilde{\mathbf{d}}$  che soddisfano a fine passo rispettivamente le equazioni di equilibrio del continuo ed all'interfaccia.

Per calcolare la matrice di rigidezza tangente globale del sistema, ad ogni iterazione è necessario valutare la matrice elastoplastica algoritmica del continuo integro, del continuo attraversato e dell'interfaccia. A tal fine occorre risolvere le rispettive equazioni costitutive e valutare gli incrementi di tensione  $\Delta\sigma$ , di variabili statiche interne  $\Delta\chi$  e del moltiplicatore  $\Delta\lambda$ , nel caso continuo, e gli incrementi di vettore delle trazioni  $\Delta t_S$ , di variabile interna  $\Delta\chi_S$  e del moltiplicatore  $\Delta\lambda_S$ , nel caso dell'interfaccia, prodotti dall'incremento dei vettori degli spostamenti rispetto ai valori raggiunti in corrispondenza dell'ultima iterazione equilibrata.

*Continuo elastico ed  
interfaccia immersa  
dissipativa*

Nel caso di continuo elastico lineare e isotropo la matrice elastoplastica algoritmica del continuo coincide con la matrice costitutiva elastica. Pertanto gli elementi della matrice di rigidezza tangente di ogni elemento si mantengono costanti e pari al loro valore elastico iniziale.

Nell'ipotesi di discontinuità immersa i gradi di libertà  $\tilde{\mathbf{d}}$  associati alla parte regolare del campo di spostamento sono gli unici ad essere considerati globali. La matrice di rigidezza globale del sistema, ottenuta pertanto dall'assemblaggio della parte regolare della matrice di rigidezza di ogni elemento, si mantiene pari a quella elastica iniziale.

*Diagramma di  
flusso dell'algoritmo  
di soluzione*

Nella Figura 3.17 è illustrato il diagramma di flusso dell'algoritmo di soluzione nell'ipotesi di continuo elastico lineare e isotropo e di interfaccia immersa con comportamento puramente dissipativo.

L'algoritmo inizia con il calcolo della matrice  $K_{\hat{\mathbf{d}},i}$  di rigidezza elementare relativa agli spostamenti nodali regolari  $\hat{\mathbf{d}}$  e del vettore  $F_{\hat{\mathbf{d}},i}$  delle forze nodali equivalenti ai carichi mantenuti costanti durante l'analisi evolutiva. Note la matrice di rigidezza e il vettore delle forze per ogni elemento si ottengono la matrice di rigidezza globale e il vettore delle forze globale attraverso la procedura di assemblaggio.

Per ogni passo  $n$  dell'analisi evolutiva, condotta a controllo di spostamento, l'algoritmo computa gli incrementi delle forze nodali equivalenti all'incremento dei cedimenti impressi al sistema secondo il percorso di carico assegnato.

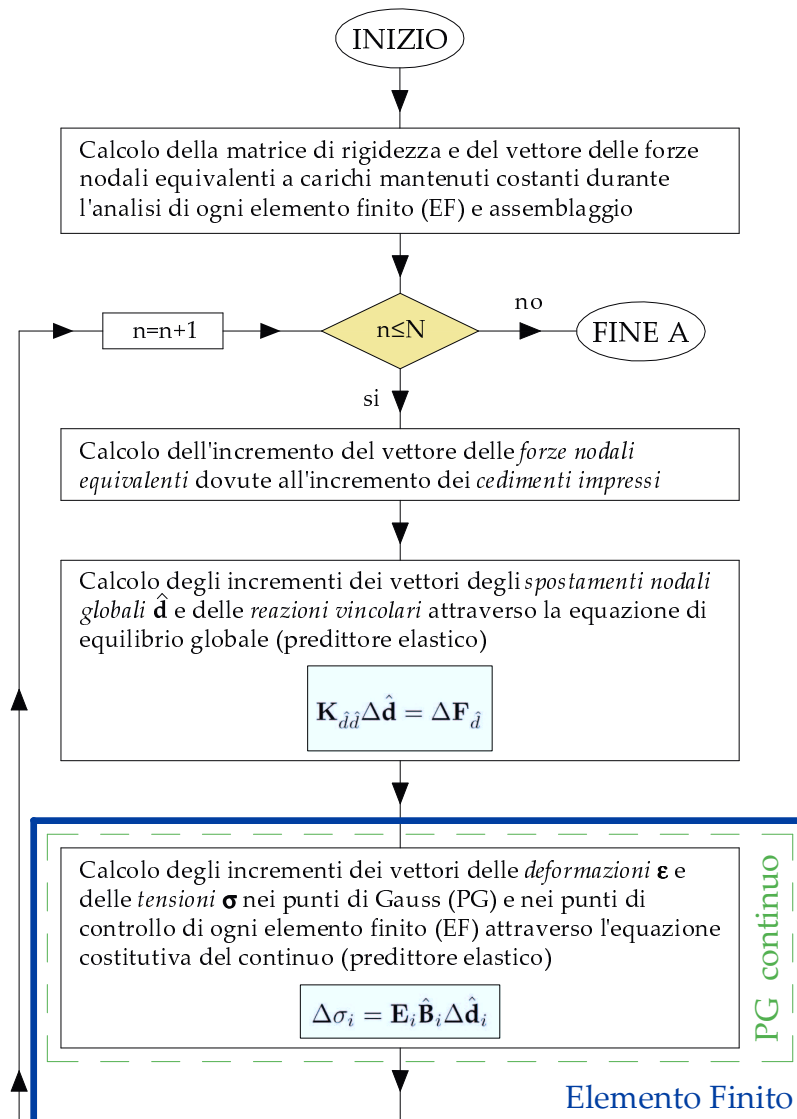
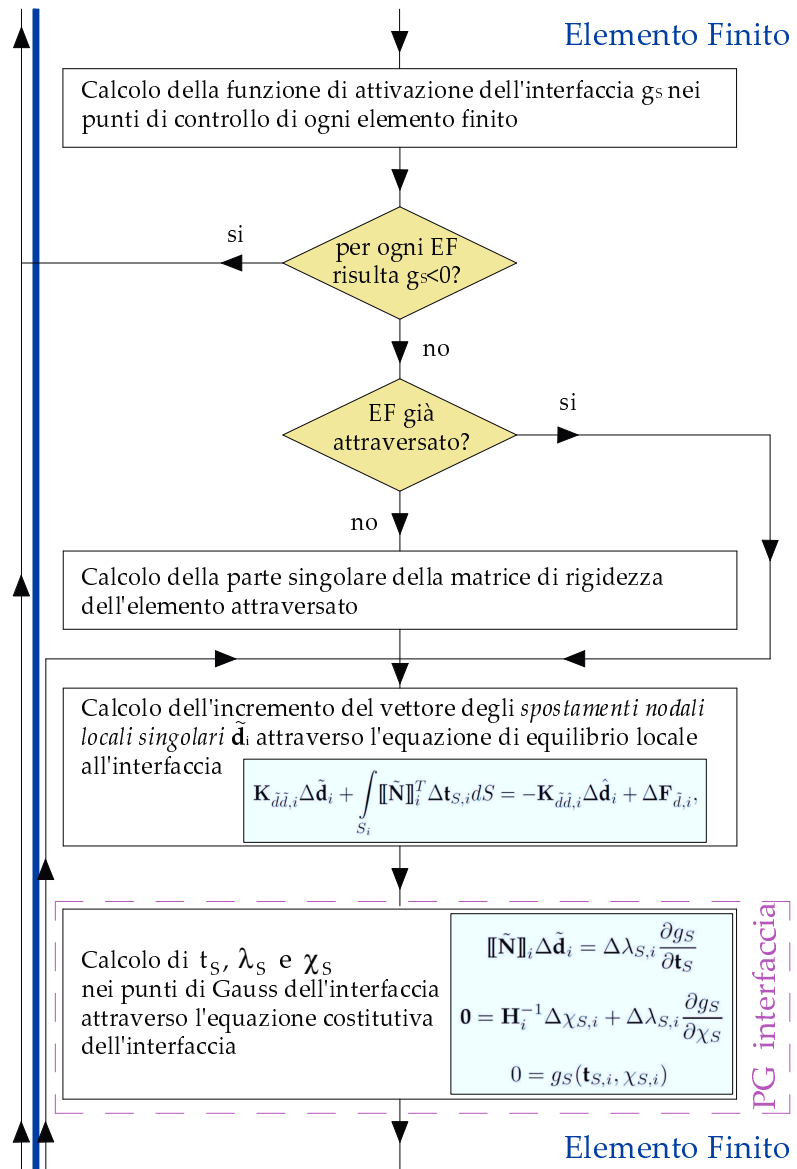
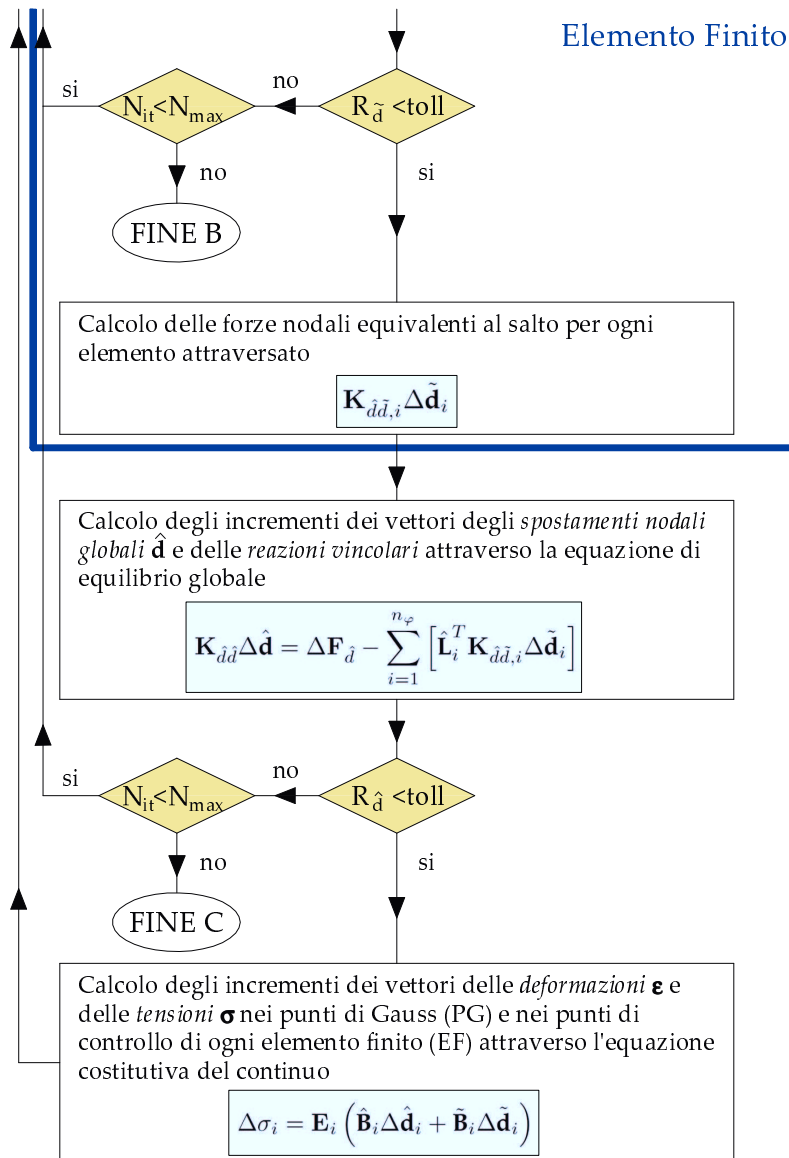


Figura 3.17: Diagramma di flusso dell'algorithmo di soluzione.







Dall'equazione di equilibrio globale viene ricavato il valore di primo tentativo dell'incremento del vettore degli spostamenti nodali globali  $\hat{\mathbf{d}}$ . Attraverso l'equazione costitutiva del continuo, vengono perciò calcolati i vettori delle deformazioni e delle tensioni (predittore elastico) nei punti di Gauss e dei cosiddetti punti di controllo di ogni elemento finito.

Nei punti di controllo viene monitorato il valore della funzione di attivazione dell'interfaccia  $g_S$ . Se per ogni elemento finito viene rispettata la condizione  $g_S \leq 0$  la risposta del sistema è puramente elastica ( $\Delta\tilde{\mathbf{d}}_i = 0$ ) e si procede con il passo successivo, in quanto i predittori elastici sono corretti.

Viceversa se per qualche elemento finito tale condizione viene violata si procede al calcolo del vettore degli spostamenti  $\Delta\tilde{\mathbf{d}}_i$  risolvendo l'equazione di equilibrio all'interfaccia. A tal fine, se l'elemento è attraversato per la prima volta, si calcola la parte di matrice di rigidità relativa ai gradi di libertà singolari.

L'equazione di equilibrio all'interfaccia è non lineare in  $\Delta\tilde{\mathbf{d}}_i$ , in quanto il valore l'incremento del vettore delle trazioni all'interfaccia  $\Delta\mathbf{t}_{S,i}$  dipende da  $\Delta\tilde{\mathbf{d}}_i$ . Per risolvere tale equazione si adopera il metodo di Newton-Raphson. Noto il valore di primo tentativo di  $\Delta\tilde{\mathbf{d}}_i$ , stimato dall'equazione di equilibrio all'interfaccia ponendo  $\Delta\mathbf{t}_{S,i} = \mathbf{0}$ , si risolve il sistema costitutivo dell'interfaccia in corrispondenza dei rispettivi punti di Gauss, calcolando i valori aggiornati di  $\Delta\mathbf{t}_{S,i}$ , con i quali si calcola un nuovo valore di  $\Delta\tilde{\mathbf{d}}_i$ . La procedura iterativa viene arrestata quando il resto  $R_{\tilde{\mathbf{d}}}$  risulta minore di una tolleranza fissata. Se il numero massimo di iterazioni  $N_{max}$  viene superato la procedura viene arrestata e l'analisi incrementale viene interrotta per mancanza di convergenza dell'equilibrio all'interfaccia (caso indicato con FINE B in Figura 3.17).

Noto il vettore  $\Delta\tilde{\mathbf{d}}_i$  si procede con il calcolo dell'incremento delle forze nodali equivalenti al salto di ogni elemento finito attraversato, il cui contributo viene ora considerato nell'equazione di equilibrio globale, che in generale non risulterà soddisfatta.

Si calcola allora un nuovo valore dell'incremento del vettore degli spostamenti globali  $\Delta\hat{\mathbf{d}}$ , con il quale si risolve nuovamente l'equilibrio all'interfaccia di ogni singolo elemento finito, ottenendo un nuovo valore di  $\Delta\tilde{\mathbf{d}}_i$ , al quale corrisponde un nuovo valore delle forze nodali equivalenti al salto di ogni elemento finito attraversato. Anche in questo caso la procedura iterativa viene arrestata quando il resto  $R_{\tilde{\mathbf{d}}}$  risulta minore di una tolleranza fissata e viene analizzato il passo

di carico successivo fino al raggiungimento dell'ultimo incremento di spostamento assegnato, tale che risulti  $n > N$  (Fine A). Se il numero massimo di iterazioni  $N_{max}$  viene superato la procedura viene arrestata e l'analisi evolutiva viene interrotta per mancanza di convergenza dell'equilibrio globale (caso indicato con FINE C in Figura 3.17).

### 3.7 Bilancio energetico

Il lavoro speso dalle forze esterne applicate al sistema è trasformato in energia. Nell'ipotesi di comportamento elastico del continuo e di interfaccia dissipativa, parte di questa energia viene accumulata dal continuo, mentre la restante parte viene dissipata dall'interfaccia.

Al fine di eseguire il bilancio energetico durante l'analisi evolutiva di un solido attraversato da discontinuità forti, sono valutate la quantità di energia immagazzinata dal continuo elastico, pari alla somma dell'energia di deformazione accumulata in ciascun elemento finito

$$\mathcal{E}_i = \frac{1}{2} \left[ \hat{\mathbf{d}}_i^T \mathbf{K}_{\hat{\hat{d}},i} \hat{\mathbf{d}}_i + \hat{\mathbf{d}}_i^T \mathbf{K}_{\hat{\tilde{d}},i} \tilde{\mathbf{d}}_i + \tilde{\mathbf{d}}_i^T \mathbf{K}_{\tilde{\hat{d}},i} \hat{\mathbf{d}}_i + \tilde{\mathbf{d}}_i^T \mathbf{K}_{\tilde{\tilde{d}},i} \tilde{\mathbf{d}}_i \right],$$

l'energia dissipata dall'interfaccia durante la sua apertura

$$\Delta \mathcal{D}_i = \sum_{PG_j=1}^{N_{PG_S}} \Delta \mathbf{t}_{S,i}^T |_{PG_j} \llbracket \tilde{\mathbf{N}} \rrbracket_i |_{PG_j} \Delta \tilde{\mathbf{d}}_i w_{PG_j},$$

dove  $N_{PG_S}$  è il numero di punti di Gauss dell'interfaccia, e l'energia immessa nel sistema, pari al lavoro del compiuto dalle forze esterne applicate per i relativi spostamenti

$$\Delta \mathcal{L}_{e,i} = \left( \Delta \mathbf{F}_{\hat{\hat{d}},i} \right)^T \Delta \hat{\mathbf{d}}_i + \left( \Delta \mathbf{F}_{\tilde{\tilde{d}},i} \right)^T \Delta \tilde{\mathbf{d}}_i,$$

dove  $\Delta \mathbf{F}_{\hat{\hat{d}},i}$  e  $\mathbf{F}_{\tilde{\tilde{d}},i}$  sono rispettivamente definiti dalle relazioni (3.26) e (3.27).



## Capitolo 4

# APPLICAZIONI NUMERICHE

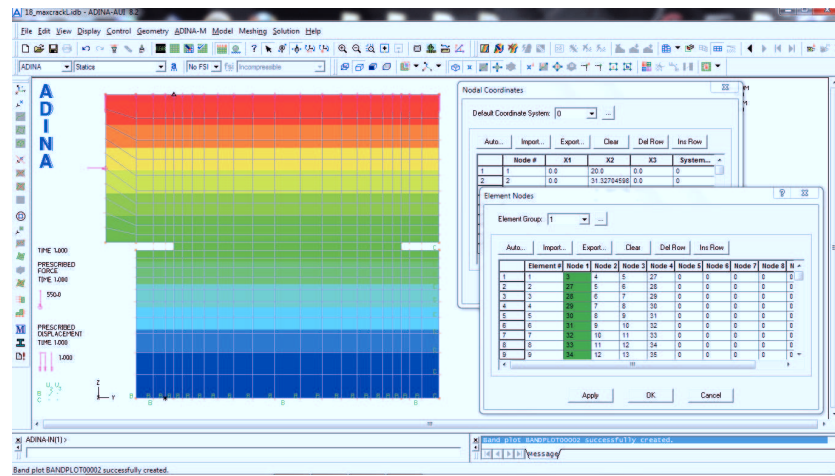
In questo capitolo sono presentate alcune applicazioni numeriche, sviluppate al fine di validare la strategia di soluzione descritta nel capitolo precedente.

L'algoritmo di soluzione proposto è stato implementato in ambiente MatLab, nell'ambito di un codice di calcolo agli elementi finiti, FracSDA8, realizzato ad hoc per studiare la nascita e la propagazione di discontinuità forti in un solido in regime di tensioni o deformazioni piane.

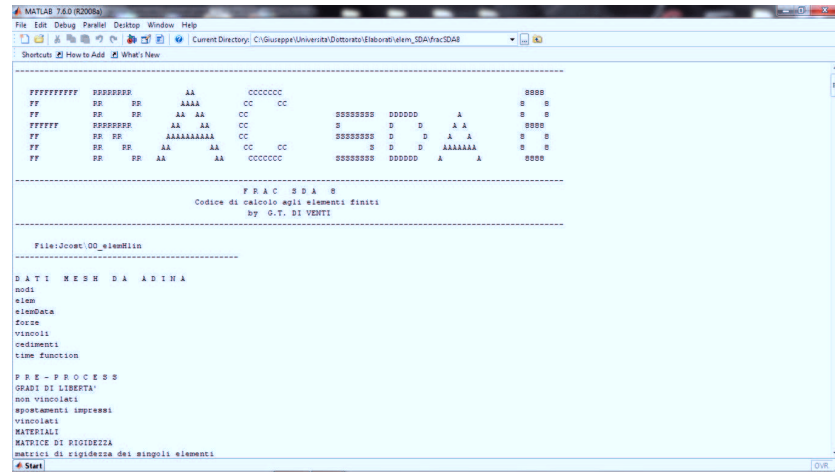
L'inserimento dei dati di input avviene attraverso dei file di interscambio tra codice di calcolo commerciale ADINA e FracSDA8.

Una volta definite la geometria, le caratteristiche dei materiali, le condizioni di vincolo, i carichi assegnati ed i cedimenti imposti, ed i parametri di discretizzazione, il programma ADINA (Figura 4.1(a)) genera i nodi della mesh, le tabelle che contengono le loro coordinate e gli array che definiscono le corrispondenze tra gradi di libertà locali e globali di ciascun elemento. Inoltre dal file di output di ADINA è possibile dedurre informazioni circa le condizioni imposte sui nodi vincolati e visualizzare il vettore dei carichi nodali e cedimenti imposti. Tali informazioni sono editabili e possono essere esportate da ADINA creando file di interscambio in formato \*.txt, che insieme ai percorsi di carico costituiscono l'input di FracSDA8.

Detto codice di calcolo è organizzato in tre blocchi principali (Figura 4.1(b)): il primo gestisce la fase di input, leggendo i file di interscambio generati con ADINA; il secondo blocco ha la funzione di trovare la



(a)



(b)

Figura 4.1: (a) Fase di generazione dei dati di input con il programma ADINA; (b) finestra di dialogo del codice FracSDA8.

soluzione del problema attraverso l'algoritmo di soluzione definito nel capitolo precedente; infine il terzo blocco permette di consultare i risultati delle analisi, la cui restituzione grafica è stata implementata ad hoc per permettere la visualizzazione delle discontinuità.

I risultati delle analisi vengono memorizzati ad ogni passo su dei file dati di output in formato txt. Inoltre alla fine dell'esecuzione vengono automaticamente generate dal codice delle figure nei formati jpeg e eps che contengono i risultati dell'analisi in forma grafica, quali:

- la configurazione deformata del sistema oggetto di analisi,
- i diagrammi delle due componenti del campo di spostamento,
- i diagrammi delle componenti di deformazione,
- i diagrammi delle componenti di tensione,
- i diagrammi delle tensioni principali,
- l'andamento della curva carico spostamento,
- gli andamenti dell'energia di deformazione, dell'energia dissipata e dell'energia immessa.

I legami costitutivi disponibili in FracSDA8 sono elastico lineare isotropo per il continuo e rigido-plastico con softening per l'interfaccia, per la quale si può optare tra una relazione lineare (Figura 4.2(a)) ed una bilineare (Figura 4.2(b)).

In FracSDA8 sono stati implementati elementi standard ed elementi arricchiti, caratterizzati dalla cinematica alle discontinuità forti (Figura 4.3). In particolare sono disponibili elementi standard

- **4L**, elementi quadrangolari bilineari a quattro nodi,
- **8Q**, elementi quadrangolari biquadratici a otto nodi,

ed elementi arricchiti

- **4L/cost**, elementi quadrangolari bilineari a quattro nodi con salto costante,
- **8Q/lin**, elementi biquadratici a otto nodi con salto lineare.

Nei paragrafi seguenti vengono presentate alcune analisi numeriche al fine di provare il corretto funzionamento del codice di calcolo FracSDA8 e di validare l'algoritmo di soluzione proposto nel capitolo precedente.

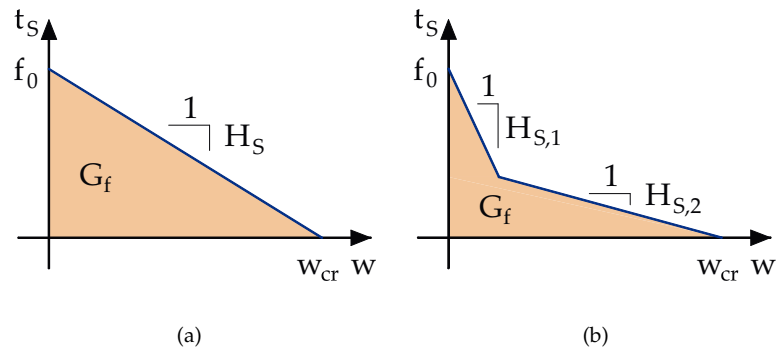


Figura 4.2: Legami costitutivi disponibili per l'interfaccia in FracSDA8: (a) lineare e (b) bilineare.

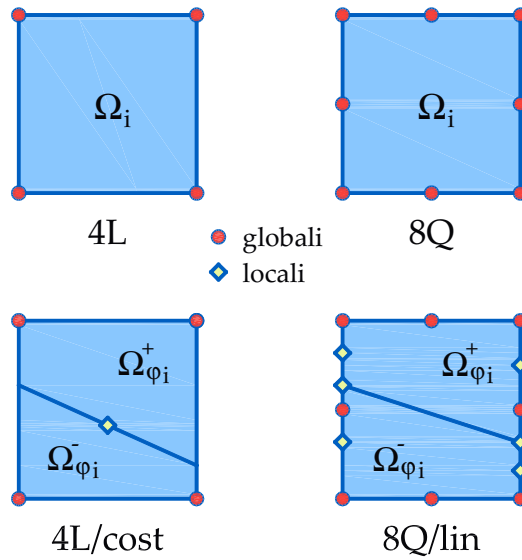


Figura 4.3: Tipologie di elementi disponibili nel codice FracSDA8.



## 4.1 Lastra quadrata tesa

L'oggetto della prima applicazione è una lastra di calcestruzzo quadrata, di lato 300 mm. Le analisi sono condotte in regime di tensioni piane impiegando due legami costitutivi per l'interfaccia: softening lineare e softening bilineare. La presenza del softening nel legame costitutivo dell'interfaccia pone l'obbligo di eseguire le analisi a controllo di spostamento. I risultati numerici sono confrontati con quelli analitici ricavati nel paragrafo 2.6.

### 4.1.1 Distribuzione di spostamenti costante

Il dominio della lastra è discretizzato con un unico elemento finito bilineare a quattro nodi con salto costante ( $4L/cost$ ) riportato in Figura 4.4. Nel seguito la discretizzazione sarà indicata con la sigla 1elem. Sui lati verticali dell'elemento sono applicate due distribuzioni di spostamenti costanti al fine di simulare lo stato di trazione uniassiale.

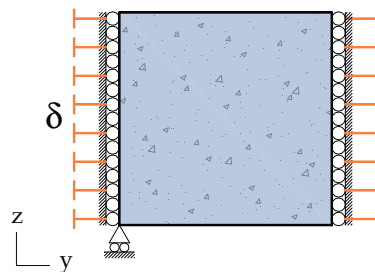


Figura 4.4: Lastra quadrata tesa con distribuzione di spostamento costante.

### Interfaccia con softening lineare

Si riportano sinteticamente i valori dei parametri costitutivi adottati per il continuo:

- modulo elastico  $E = 28500 \text{ [N/mm}^2\text{]}$
- coefficiente di Poisson  $\nu = 0.2$

per l'interfaccia con softening lineare:

- resistenza a trazione  $f_0 = 1.8 \text{ [N/mm}^2\text{]}$

- modulo di softening  $H_{S1} = -18$  [N/mm<sup>3</sup>]

e la relativa funzione di attivazione, corrispondente al criterio della massima tensione normale di Rankine:

$$g_S(\mathbf{t}_S, \chi_S) = \mathbf{t}_S^T \mathbf{n} - f_0 - \chi_S$$

Nella Tabella 4.1 vengono riportati il codice dell'analisi (1elemL), il tipo di elemento utilizzato, il numero di nodi ottenuti a seguito della discretizzazione del problema, il tempo di esecuzione dell'analisi, lo spostamento  $\delta_p$  ed il carico di picco  $F_p$ . Inoltre, al fine di valutare la presenza o meno di contributi energetici spuri, si riporta il valore dell'energia di deformazione  $\mathcal{E}_u$  in corrispondenza dell'ultimo passo dell'analisi. Infatti quando l'interfaccia è completamente aperta il solido risulta scarico e perciò l'energia di deformazione deve risultare nulla.

Tabella 4.1: Lastra quadrata tesa: distribuzione costante e softening lineare.

Analisi	Elem/ Salto	Nodi	Tempo [sec]	$\delta_p$ [mm]	$F_p$ [N]	$\mathcal{E}_u$ [Nmm]
1elemL	4L/cost	4	35	0.009	540	0

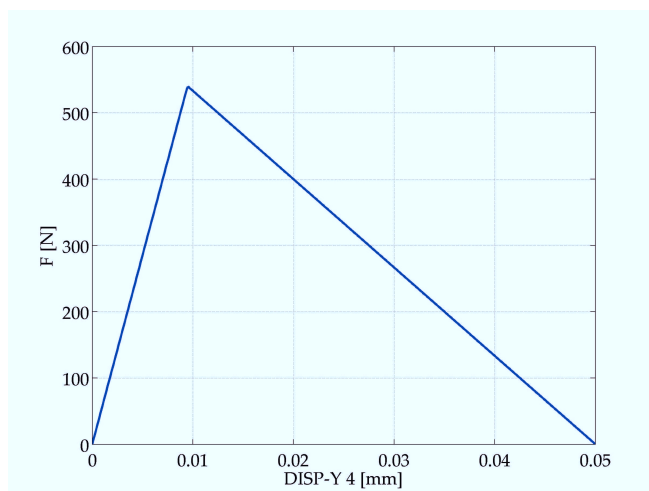
Nelle Figure 4.5(a) e 4.5(b) sono riportati rispettivamente gli andamenti della risultante delle trazioni e lo spostamento trasversale in funzione dello spostamento impresso. Tali andamenti coincidono con le curve analitiche ottenute nell'esempio del paragrafo 2.6.

Nelle Figure 4.6(a) e 4.6(b) sono riportati, rispettivamente in termini totali ed in termini incrementali, gli andamenti dell'energia immagazzinata dal continuo elastico (curva in blu), dell'energia dissipata dall'interfaccia (curva in rosso) e l'energia immessa nel sistema (curva in verde), pari al lavoro compiuto dalle reazioni vincolari per i relativi cedimenti. Dal confronto di tali curve si evince che il bilancio energetico è soddisfatto in corrispondenza di tutti i passi dell'analisi, in quanto la somma dell'energia accumulata nel continuo e dell'energia dissipata risulta pari all'energia immessa nel sistema, sia in termini totali che in termini incrementali.

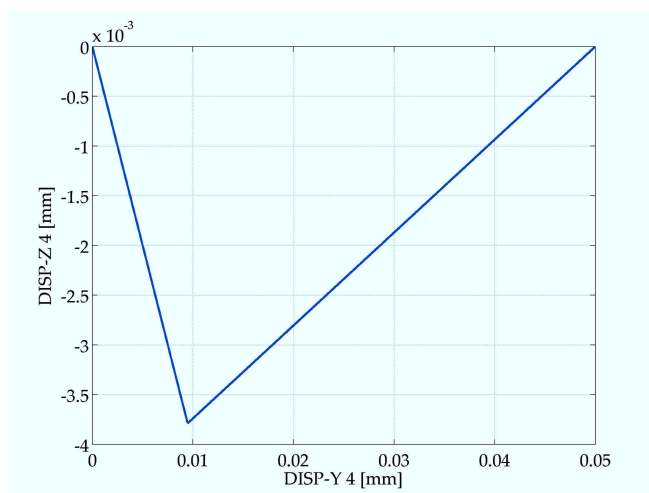
Nella Figura 4.7 sono riportati gli andamenti della componente orizzontale dello spostamento in corrispondenza di diversi istanti dell'analisi.

### Interfaccia con softening bilineare

Si è condotta un'altra analisi adottando per l'interfaccia un legame softening bilineare regolato dai seguenti parametri:

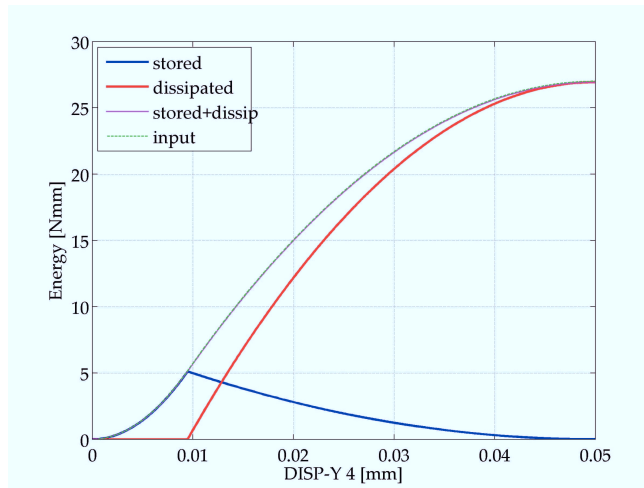


(a)

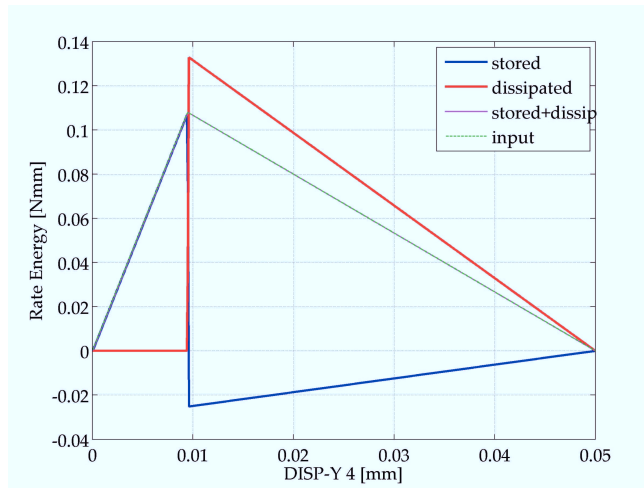


(b)

Figura 4.5: Lastra quadrata tesa. Elemento 4L/cost. Mesh 1elem. Distribuzione di spostamento costante. Interfaccia con softening lineare: (a) curva carico spostamento, (b) spostamento trasversale.

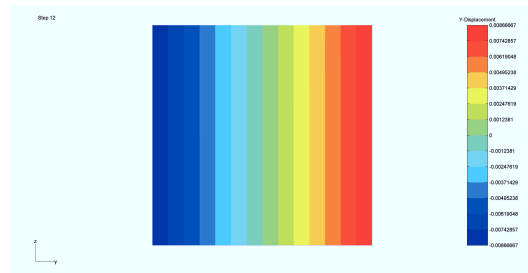


(a)



(b)

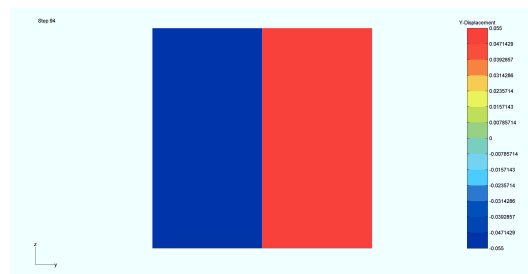
Figura 4.6: Lastra quadrata tesa. Elemento 4L/cost. Mesh 1elem. Distribuzione di spostamento costante. Interfaccia con softening lineare. Bilancio energetico: (a) in termini totali, (b) in termini incrementali.



(a)



(b)



(c)

Figura 4.7: Lastra quadrata tesa. Elemento 4L/cost. Mesh 1elem. Distribuzione di spostamento costante. Interfaccia con softening lineare. Spostamento direzione Y. Istanti: (a) 12 ( $\delta=0.009$  mm), (b) 32 ( $\delta=0.025$  mm) e (c) 94 ( $\delta=0.050$  mm).

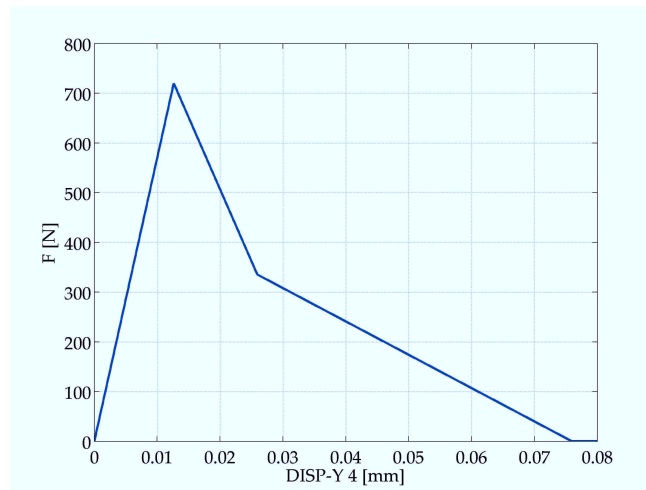
- resistenza a trazione  $f_0 = 3.3$  [N/mm<sup>2</sup>]
- modulo di softening del primo ramo  $H_{S1} = -60$  [N/mm<sup>3</sup>]
- modulo di softening del secondo ramo  $H_{S2} = -6$  [N/mm<sup>3</sup>]
- apertura critica  $w_{cr} = 0.72$  [mm],

i cui risultati sono sintetiticamente riportati in Tabella 4.2.

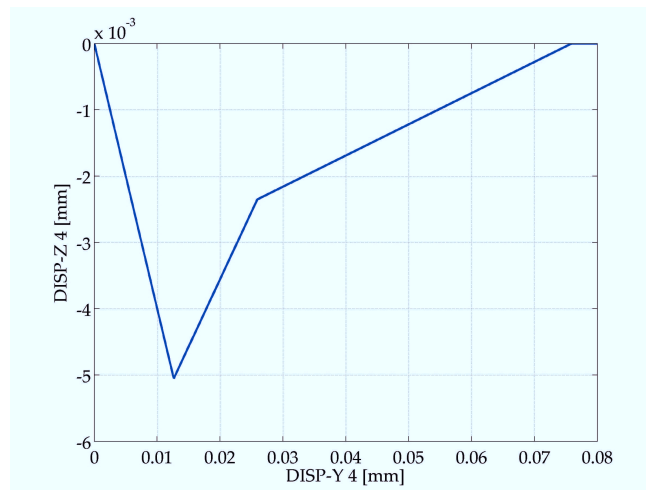
Tabella 4.2: Lastra quadrata tesa: distribuzione costante e softening bilineare.

Analisi	Elem/ Salto	Nodi	Tempo [sec]	$\delta_p$ [mm]	$F_p$ [N]	$\mathcal{E}_u$ [Nmm]
1elemL	4L/cost	4	36	0.012	720	0

Nelle Figure 4.8(a) e 4.8(b) sono riportati rispettivamente gli andamenti della risultante delle trazioni e lo spostamento trasversale in funzione dello spostamento impresso. Nella Figura 4.9(a) è riportato l'andamento dell'energia immagazzinata, dissipata e immessa nel sistema, pari al lavoro compiuto dalle forze esterne. Inoltre nella Figura 4.9(b) è riportato il bilancio energetico in termini incrementali. Anche in questo caso si nota che il bilancio energetico risulta soddisfatto in corrispondenza di tutti i passi dell'analisi.

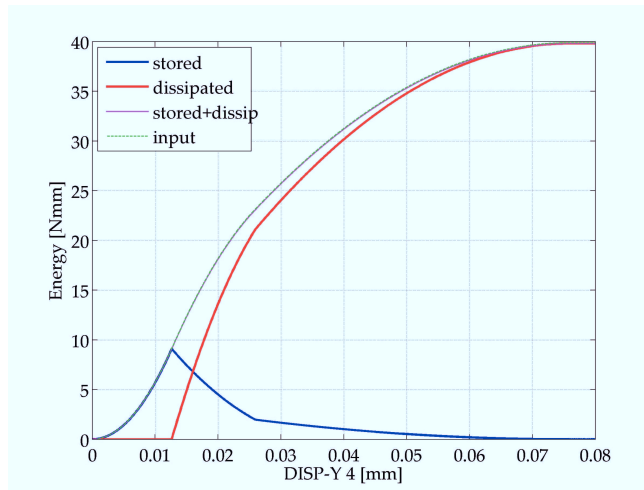


(a)

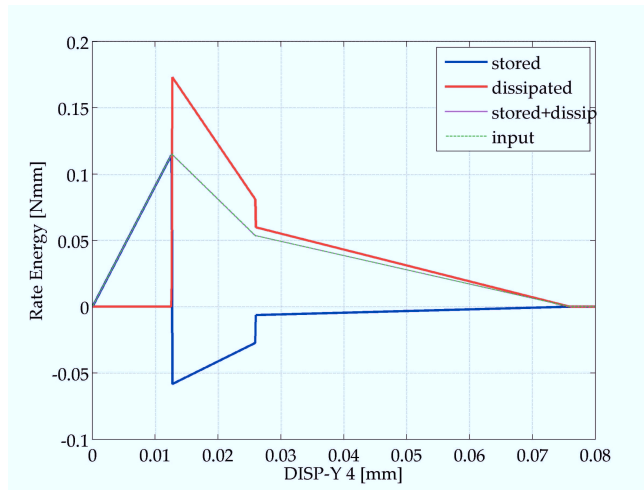


(b)

Figura 4.8: Lastra quadrata tesa. Elemento 4L/cost. Mesh 1elem. Distribuzione di spostamento costante. Interfaccia con softening bilinare: (a) curva carico spostamento, (b) spostamento trasversale.



(a)



(b)

Figura 4.9: Lastra quadrata tesa. Elemento 4L/cost. Mesh 1elem. Distribuzione di spostamento costante. Interfaccia con softening bilinerare. Bilancio energetico: (a) in termini totali, (b) in termini incrementali.



### 4.1.2 Distribuzione di spostamenti lineare

Sui lati verticali della lastra sono ora assegnati gli spostamenti orizzontali con distribuzione lineare (Figura 4.10). Il dominio è discretizzato con un unico elemento finito (1elem). Nel seguito si discutono i risultati di due analisi: la prima è condotta utilizzando l'elemento 4L/cost bilineare a quattro nodi con salto costante, mentre per la seconda si impiega l'elemento 8Q/lin biquadratico a otto nodi con salto lineare.

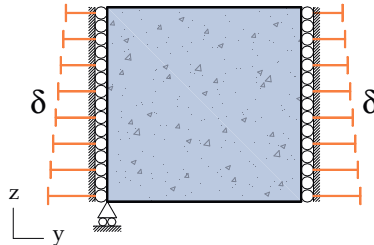


Figura 4.10: Lastra quadrata tesa con distribuzione di spostamento lineare.

#### Approssimazione del salto costante con elemento 4L/cost

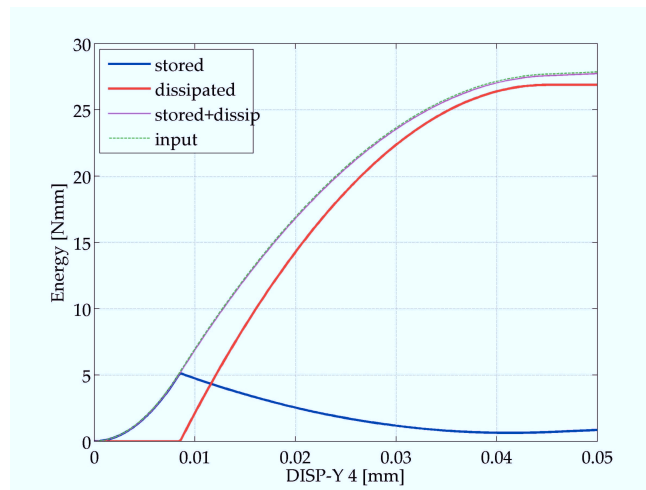
Nelle Figure 4.11(a) e 4.11(b) è riportato il bilancio energetico in corrispondenza dei diversi istanti dell'analisi, rispettivamente in termini totali ed in termini incrementali. Dalla Figura 4.11(a) si nota che per spostamenti impressi maggiori di 0.04 mm l'energia di deformazione accumulata dall'elemento aumenta. Tale fenomeno, detto shear locking, è dovuto alle di tensioni tangenziali e di tensioni normali  $\sigma_z$  spurie (crescenti all'aumentare dello spostamento impresso), presenti in un elemento bilineare se sottoposto a sollecitazioni di flessione.

Nella Figura 4.12 sono riportati gli andamenti della componente orizzontale dello spostamento.

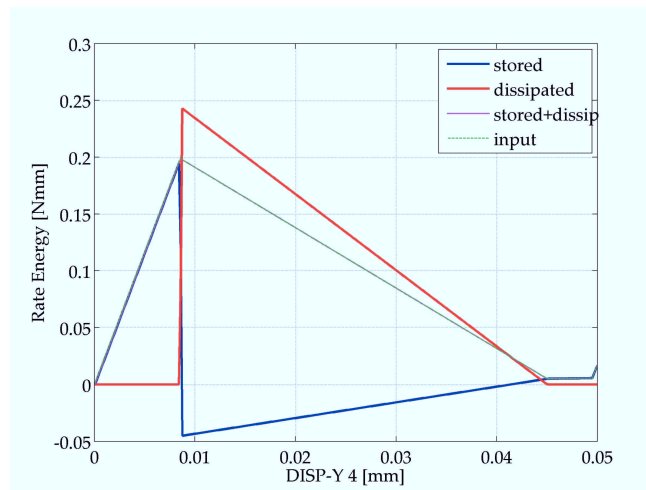
#### Approssimazione del salto lineare con elemento 8Q/lin

Al fine di eliminare, o comunque di mitigare, l'effetto dello shear locking, l'analisi è stata ripetuta utilizzando un elemento biquadratico a otto nodi con approssimazione del salto lineare.

Nelle Figure 4.13(a) e 4.13(b) sono riportati rispettivamente l'andamento della risultante delle trazioni in funzione dello spostamento im-



(a)



(b)

Figura 4.11: Lastra quadrata tesa. Elemento 4L/cost. Mesh 1elem. Distribuzione di spostamento lineare. Bilancio energetico: (a) in termini totali, (b) in termini incrementali.



(a)



(b)



(c)

Figura 4.12: Lastra quadrata tesa. Elemento 4L/cost. Mesh 1elem. Distribuzione di spostamento lineare. Spostamento direzione Y. Istanti: (a) 12 ( $\delta=0.009$  mm), (b) 32 ( $\delta=0.025$  mm) e (c) 94 ( $\delta=0.050$  mm).

presso e il bilancio energetico nei vari passi dell'analisi, dal quale si evince l'eliminazione del fenomeno di shear locking.

Nella Figura 4.14 sono riportati gli andamenti della componente orizzontale dello spostamento.

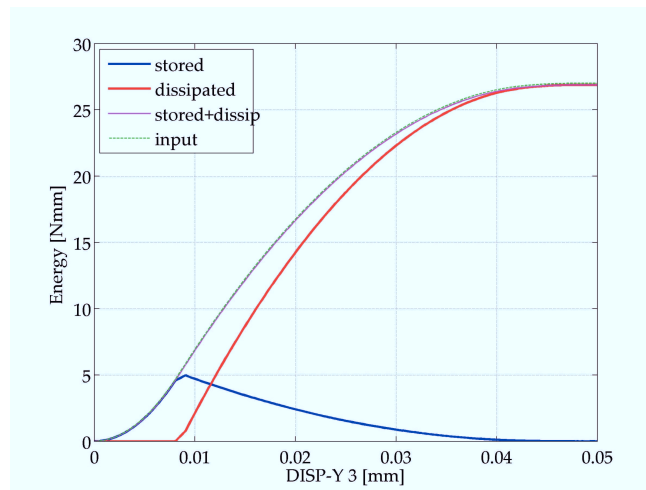
### Confronti

I risultati ottenuti dalle analisi condotte sulla lastra quadrata tesa soggetta a distribuzione di spostamento lineare, discretizzata con un solo elemento (1elem), rispettivamente condotte con elementi finiti bilineare a quattro nodi con salto costante ( $4L/cost$ ) e con elementi finiti biquadratico a otto nodi con salto lineare ( $8Q/lin$ ), sono confrontati con i risultati ottenuti al variare della discretizzazione del dominio della lastra. Le discretizzazioni adottate sono schematizzate nelle Figure 4.15(a)-4.15(c). Tali risultati sono stati inoltre raffrontati con una soluzione di riferimento, ottenuta considerando la discretizzazione schematizzata in Figura 4.15(d) ed impiegando elementi bilineari a quattro nodi con salto costante ( $4L/cost$ ). Per tale analisi nelle Figure 4.16(a) e 4.16(b) sono riportati gli andamenti dell'energia di deformazione, dell'energia dissipata e dell'energia immessa, rispettivamente in termini totali ed in termini incrementali, dal cui confronto si evince che il bilancio energetico è soddisfatto.

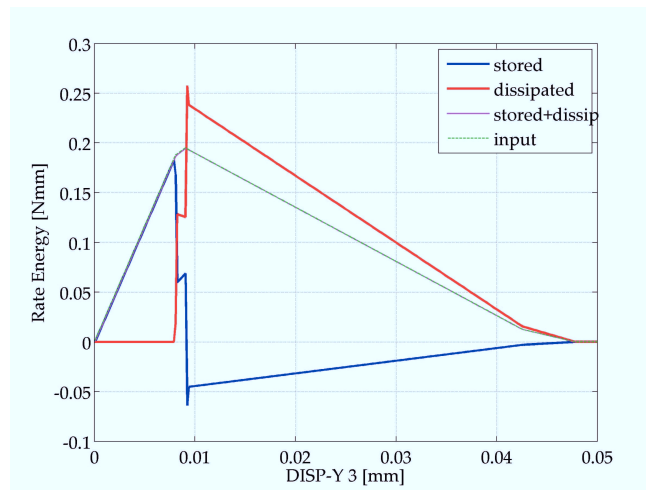
Nella Tabella 4.3 sono riportati a confronto i risultati di tali analisi. Nelle Figure 4.17(a) e 4.17(b) sono riportati a confronto rispettivamente gli andamenti della risultante delle trazioni e dello spostamento trasversale ottenuti attraverso le analisi condotte con le diverse discretizzazioni. Tali confronti non mettono in evidenza significative differenze tra le analisi, confermando il carattere mesh-independent del metodo.

Nelle Figure 4.18(a) e 4.18(b) sono riportati due ingrandimenti della curva carico spostamento di Figura 4.17(a), rispettivamente in corrispondenza del picco ed in corrispondenza dello spostamento massimo. Si nota che, a parità di tipo di elemento, la soluzione si avvicina di più a quella di riferimento aumentando il numero di elementi utilizzati nella discretizzazione. Inoltre, a parità di numero di elementi, si nota che la soluzione fornita dall'elemento biquadratico con salto lineare è più aderente alla soluzione di riferimento rispetto a quella ottenuta utilizzando l'elemento bilineare con salto costante.

Dalla Figura 4.19, dove sono riportati a confronto gli andamenti dell'energia di deformazione, si nota che l'energia di deformazione, superato il picco, diminuisce. Le analisi condotte utilizzando elementi bilineari con salto costante predicono un decremento minore rispetto



(a)



(b)

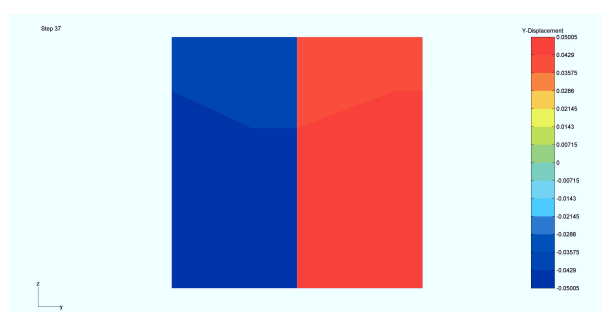
Figura 4.13: Lastra quadrata tesa. Elemento 8Q/lin. Mesh 1elem. Distribuzione di spostamento lineare. Bilancio energetico: (a) in termini totali, (b) in termini incrementali.



(a)



(b)



(c)

Figura 4.14: Lastra quadrata tesa. Elemento 8Q/lin. Mesh 1elem. Distribuzione di spostamento lineare. Spostamento direzione Y. Istanti: (a) 12 ( $\delta=0.009$  mm), (b) 32 ( $\delta=0.025$  mm) e (c) 94 ( $\delta=0.050$  mm).

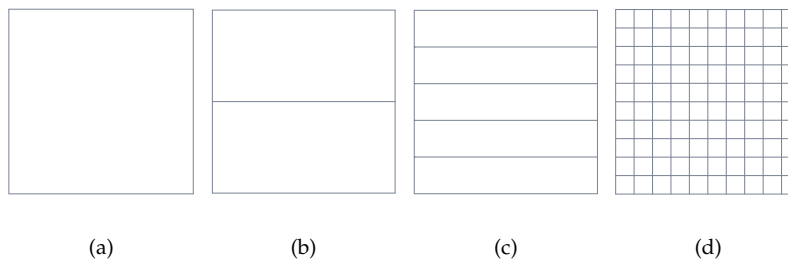
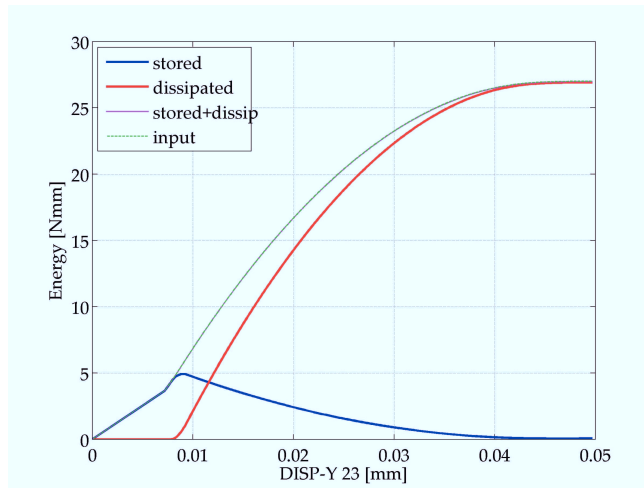


Figura 4.15: Discretizzazioni adottate per la lastra quadrata tesa: (a) 1elem, (b) 2elem, (c) 5elem e (d) 10elem.

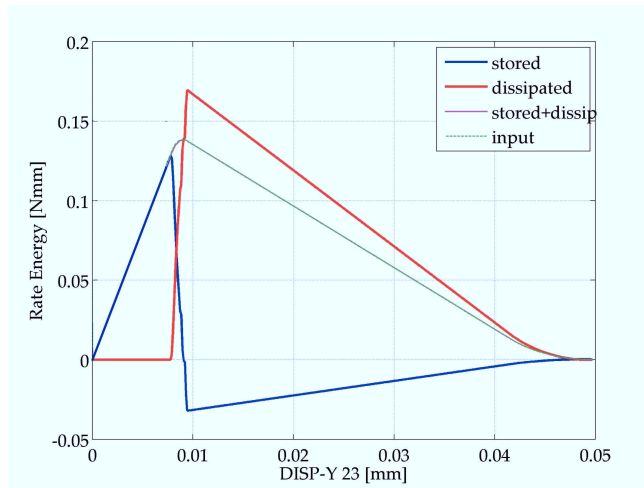
alle analisi condotte utilizzando elementi biquadratici con salto lineare. Tale fenomeno, dovuto alla presenza di shear locking, è mitigato raffittendo la discretizzazione e viene del tutto eliminato utilizzando elementi biquadratici con salto lineare.

Tabella 4.3: Lastra quadrata tesa: distribuzione lineare.

Analisi	Elem/ Salto	Nodi	Tempo [sec]	$\delta_p$ [mm]	$F_p$ [N]	$\mathcal{E}_u$ [Nmm]
1elemL	4L/cost	4	11	0.0085	539.0	0.872
2elemL	4L/cost	6	20	0.0089	532.0	0.394
5elemL	4L/cost	12	46	0.0089	529.2	0.267
1elemQ	8Q/lin	8	55	0.0091	532.8	0
2elemQ	8Q/lin	13	195	0.0092	530.0	0
5elemQ	8Q/lin	28	1352	0.0089	529.0	0
10elemL	4L/cost	144	2913	0.0089	529.6	0.065



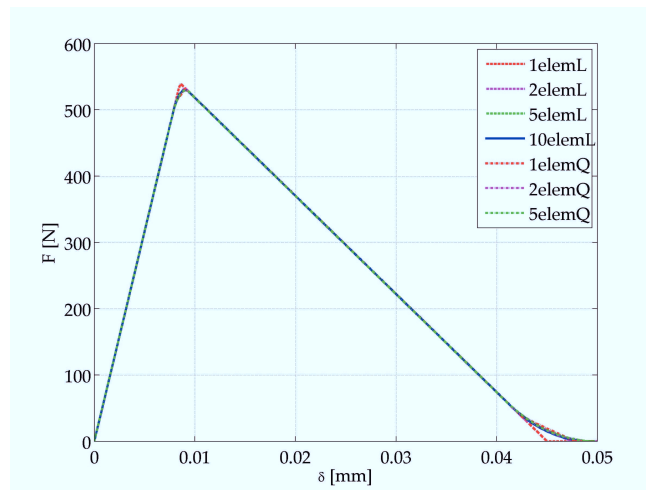
(a)



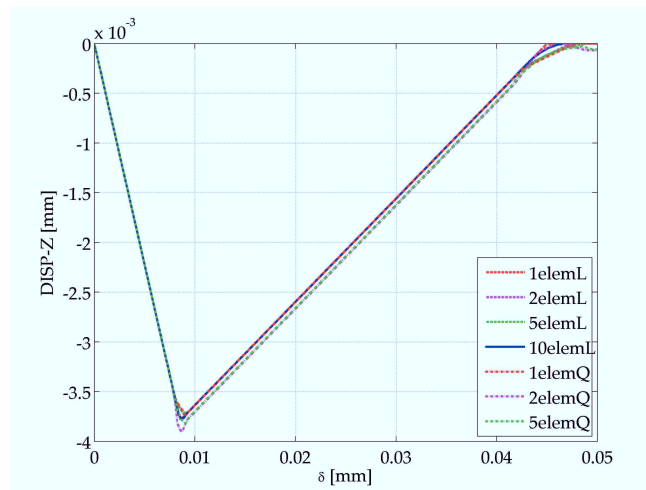
(b)

Figura 4.16: Lastra quadrata tesa. Elemento 4L/cost. Mesh 10elemL. Distribuzione di spostamento lineare. Bilancio energetico: (a) in termini totali, (b) in termini incrementali.



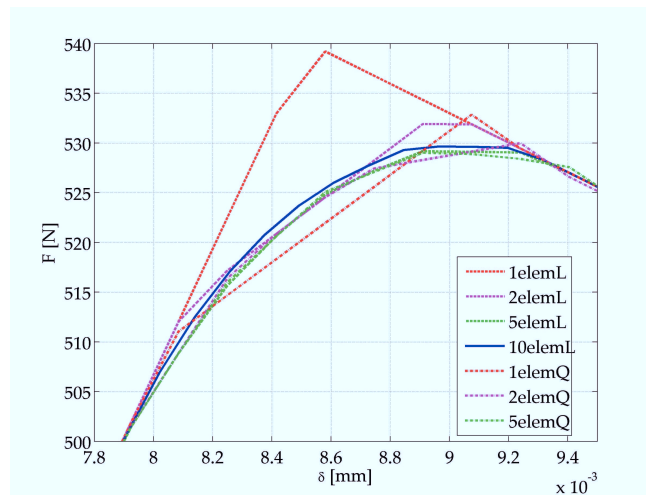


(a)

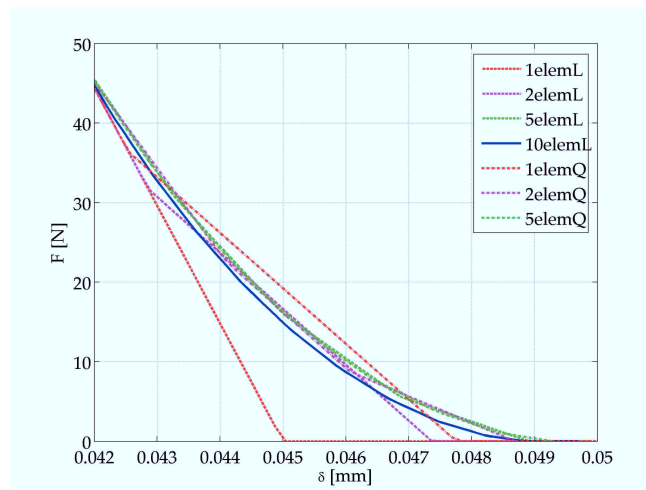


(b)

Figura 4.17: Lastra quadrata tesa. Distribuzione di spostamento lineare. Confronti tra i risultati ottenuti con le discretizzazioni di Figura 4.15 e gli elementi 4L/cost e 8Q/lin: (a) curva carico spostamento, (b) spostamento trasversale.



(a)



(b)

Figura 4.18: Lastra quadrata tesa. Distribuzione di spostamento lineare. Confronti tra i risultati ottenuti con le discretizzazioni di Figura 4.15 e gli elementi 4L/cost e 8Q/lin. Curva carico spostamento: (a) ingrandimento in corrispondenza del picco, (b) ingrandimento in corrispondenza dello spostamento ultimo.

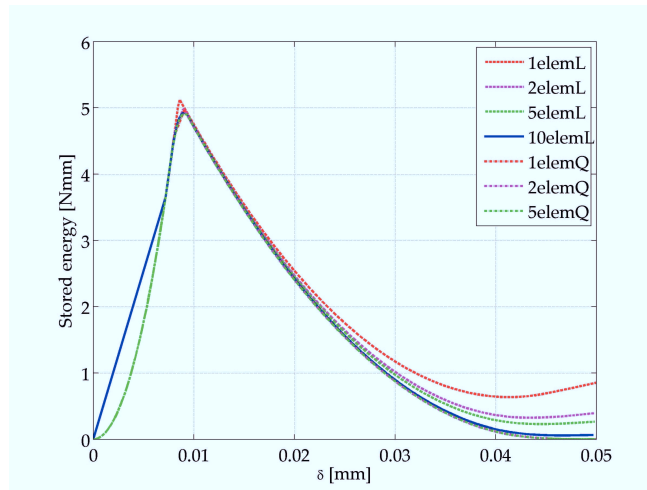


Figura 4.19: Lastra quadrata tesa. Distribuzione di spostamento lineare. Confronti tra i risultati ottenuti con le discretizzazioni di Figura 4.15 e gli elementi 4L/cost e 8Q/lin: energia di deformazione.

## 4.2 Lastra rettangolare tesa

La prima applicazione strutturale è relativa ad una lastra di calcestruzzo tesa, di forma rettangolare avente dimensioni 150x300 mm (Figura 4.20), che presenta un indebolimento a metà della sua altezza. Si ri-

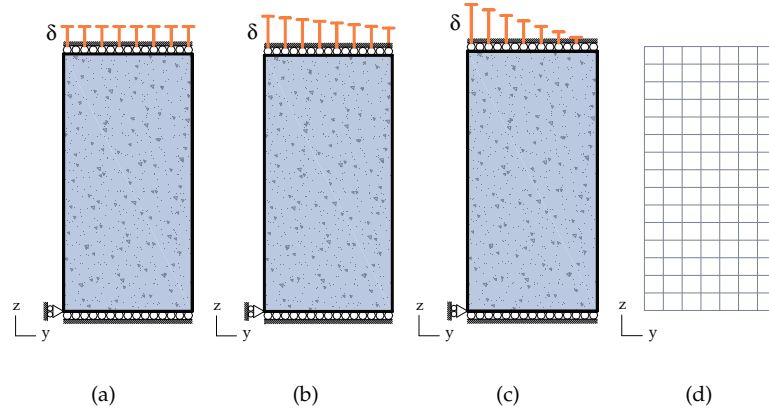


Figura 4.20: Lastra rettangolare tesa: (a) distribuzione costante, (b) distribuzione trapezoidale, (c) distribuzione triangolare e (d) discretizzazione adottata.

portano sinteticamente i valori dei parametri costitutivi adottati per il continuo:

- modulo elastico  $E = 28500$  [N/mm<sup>2</sup>]
- coefficiente di Poisson  $\nu = 0.2$

per l'interfaccia con softening bilineare:

- resistenza a trazione  $f_0 = 3.3$  [N/mm<sup>2</sup>]
- modulo di softening del primo ramo  $H_{S1} = -60$  [N/mm<sup>3</sup>]
- modulo di softening del secondo ramo  $H_{S2} = -6$  [N/mm<sup>3</sup>]
- apertura critica  $w_{cr} = 0.72$  [mm]

e la relativa funzione di attivazione, corrispondente al criterio della massima tensione normale di Rankine:

$$g_S(\mathbf{t}_S, \chi_S) = \mathbf{t}_S^T \mathbf{n} - f_0 - \chi_S.$$

L'analisi è condotta in regime di tensioni piane a controllo di spostamento, imponendo gli spostamenti del lato superiore della lastra con distribuzione costante (Figura 4.20(a)), lineare trapezoidale (Figura 4.20(b)) e lineare trinagolare (Figura 4.20(c)).

#### 4.2.1 Distribuzione di spostamenti costante

In questo paragrafo sono descritti i risultati dell'analisi condotta con distribuzione di spostamenti costante, utilizzando elementi bilineari a quattro nodi con salto costante ( $4L/\text{cost}$ ). In Figura 4.21 è riportato l'andamento della risultante delle trazioni in funzione dello spostamento impresso.

Nelle Figure 4.22(a) e 4.22(b) sono riportati, rispettivamente in termini totali ed in termini incrementali, gli andamenti dell'energia immagazzinata dal continuo elastico (curva in blu), dell'energia dissipata dall'interfaccia (curva in rosso) e l'energia immessa nel sistema (curva in verde), pari al lavoro compiuto dalle reazioni vincolari per i relativi cedimenti. Dal confronto di tali curve si evince che il bilancio energetico è soddisfatto in corrispondenza di tutti i passi dell'analisi, in quanto la somma dell'energia accumulata nel continuo e dell'energia dissipata risulta pari all'energia immessa nel sistema, sia in termini totali che in termini incrementali.

Tabella 4.4: Lastra rettangolare tesa: distribuzione costante.

Analisi	Elem/ Salto	Tempo [sec]	$\delta_p$ [mm]	$F_p$ [N]	$F_u$ [N]	$\mathcal{E}_u$ [Nmm]
4nodiL	4L/cost	3943	0.018	225	0	0

Inoltre nelle Figure 4.23 e 4.24 sono rispettivamente raffigurati la configurazione deformata del sistema e l'andamento della componente verticale dello spostamento.

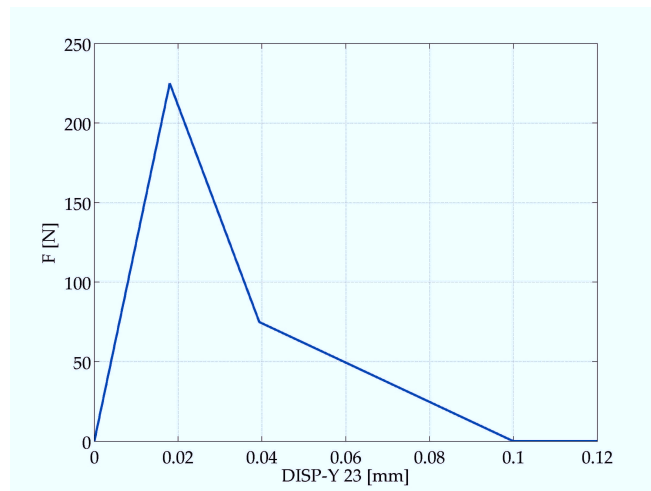
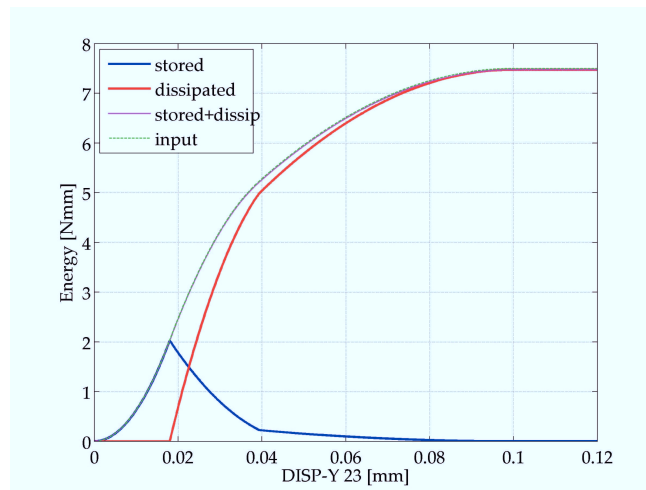
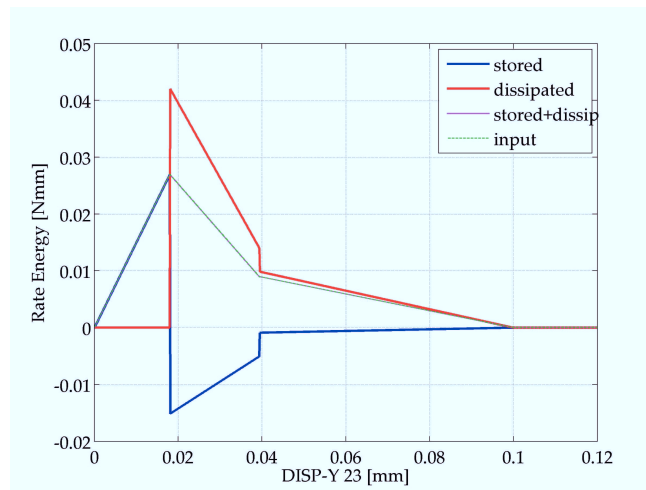


Figura 4.21: Lastra rettangolare tesa. Elemento 4L/cost. Analisi 4nodiL. Distribuzione di spostamento costante. Curva carico spostamento.



(a)



(b)

Figura 4.22: Lastra rettangolare tesa. Elemento 4L/cost. Analisi 4nodiL. Distribuzione di spostamento costante. Bilancio energetico: (a) in termini totali (b) in termini incrementali.

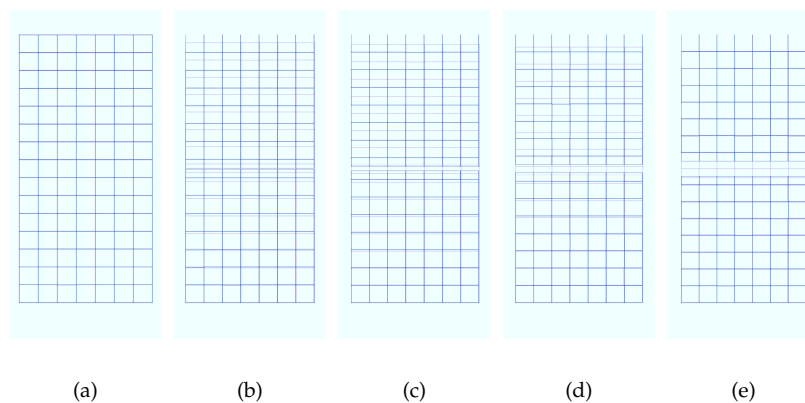


Figura 4.23: Lastra rettangolare tesa. Elemento 4L/cost. Analisi 4nodiL. Distribuzione di spostamento costante. Configurazione deformata. Istanti: (a) 12 ( $\delta=0.012$  mm), (b) 162 ( $\delta=0.162$  mm), (c) 202 ( $\delta=0.202$  mm), (d) 252 ( $\delta=0.252$  mm) e (e) 352 ( $\delta=0.352$  mm).

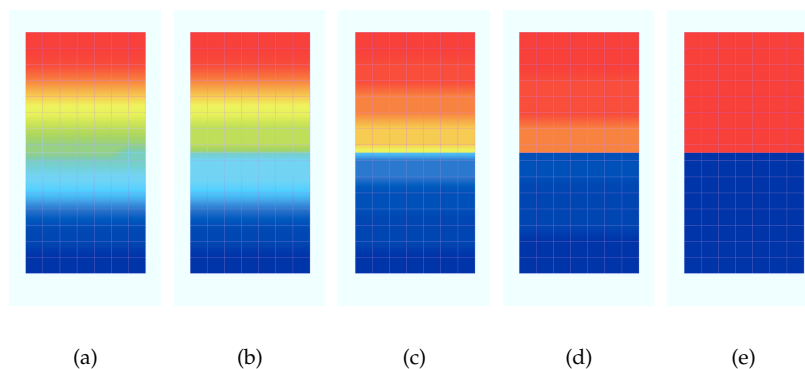


Figura 4.24: Lastra rettangolare tesa. Elemento 4L/cost. Analisi 4nodiL. Distribuzione di spostamento costante. Spostamento direzione Z. Istanti: (a) 12 ( $\delta=0.012$  mm), (b) 162 ( $\delta=0.162$  mm), (c) 202 ( $\delta=0.202$  mm), (d) 252 ( $\delta=0.252$  mm) e (e) 352 ( $\delta=0.352$  mm).



### 4.2.2 Distribuzione di spostamenti trapezoidale

In questo paragrafo sono descritti i risultati delle analisi condotte, utilizzando rispettivamente elementi bilineari a quattro nodi con salto costante (4L/cost) ed elementi biquadratici a otto nodi con salto lineare (8Q/lin), applicando una distribuzione di spostamenti lineare trapezoidale.

In Figura 4.25 sono riportati gli andamenti della risultante delle trazioni in funzione dello spostamento impresso per ambedue le analisi, dal cui confronto non si osservano sostanziali differenze. Dalla Tabella 4.5 si nota che l'analisi condotta con elementi a quattro nodi (4nodiL) sovrastima il carico di picco di circa il 2% rispetto all'analisi condotta con elementi a otto nodi (8nodiQ).

Tabella 4.5: Lastra rettangolare tesa: distribuzione trapezoidale.

Analisi	Elem/ Salto	Tempo [sec]	$\delta_p$ [mm]	$F_p$ [N]	$F_u$ [N]	$\mathcal{E}_u$ [Nmm]
4nodiL	4L/cost	4081	0.0221	211	4	0.490
8nodiQ	8Q/lin	23208	0.0220	207	6	0.007

Nelle Figure 4.27(a) e 4.27(b) sono riportati, per entrambe le analisi, rispettivamente in termini totali ed in termini incrementali, gli andamenti dell'energia immagazzinata dal continuo elastico (curva in blu), dell'energia dissipata dall'interfaccia (curva in rosso) e l'energia immessa nel sistema (curva in verde). Dal confronto di tali curve si evince che il bilancio energetico è soddisfatto in corrispondenza di tutti i passi dell'analisi, in entrambi i casi, ma l'analisi condotta con elementi bilineari sovrastima l'energia di deformazione del continuo in corrispondenza del picco. Inoltre nella fase post-picco, per valori dello spostamento impresso massimo  $\delta$  maggiori di circa 0.05 mm, si nota l'incremento dell'energia di deformazione, dovuto all'aumento delle tensioni tangenziali spurie causa dello shear-locking, fenomeno assente nell'analisi con elementi biquadratici.

Infine nelle Figure 4.28 e 4.26 sono rispettivamente raffigurati la configurazione deformata del sistema, dalla quale si può osservare l'innescio e la propagazione dell'interfaccia, e l'andamento della componente verticale dello spostamento in diversi istanti dell'analisi.

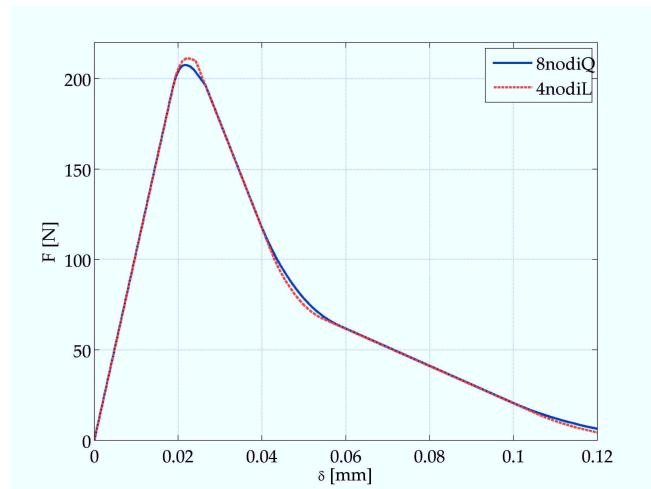


Figura 4.25: Lastra rettangolare tesa. Distribuzione di spostamento trapezoidale. Confronto tra elementi 4L/cost e 8Q/lin: curva carico spostamento.

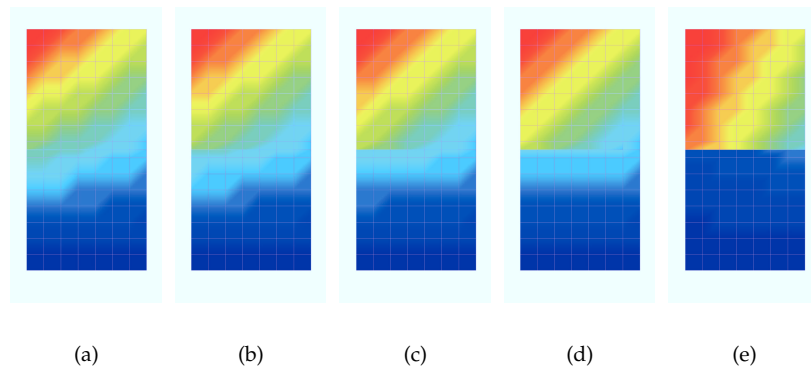
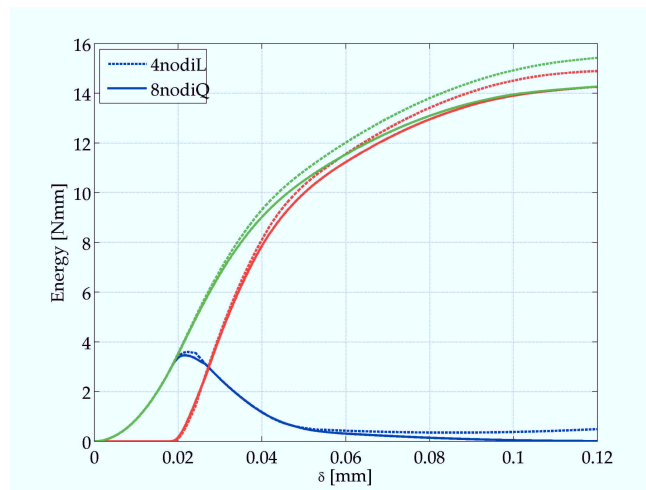
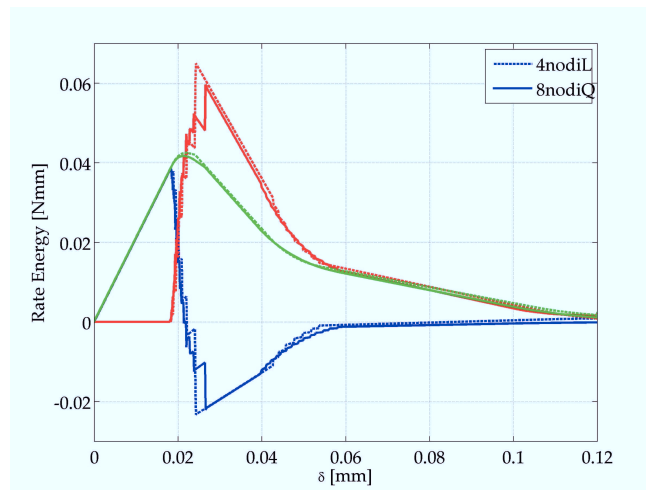


Figura 4.26: Lastra rettangolare tesa. Elemento 8Q/lin. Analisi 8nodiQ. Distribuzione di spostamento trapezoidale. Spostamento direzione Z. Istanti: (a) 162 ( $\delta=0.162$  mm), (b) 172 ( $\delta=0.172$  mm), (c) 182 ( $\delta=0.182$  mm), (d) 192 ( $\delta=0.192$  mm), e (e) 272 ( $\delta=0.272$  mm).



(a)



(b)

Figura 4.27: Lastra rettangolare tesa. Distribuzione di spostamento trapezoidale. Confronto tra elementi 4L/cost e 8Q/lin. Bilancio energetico: (a) in termini totali (b) in termini incrementali.

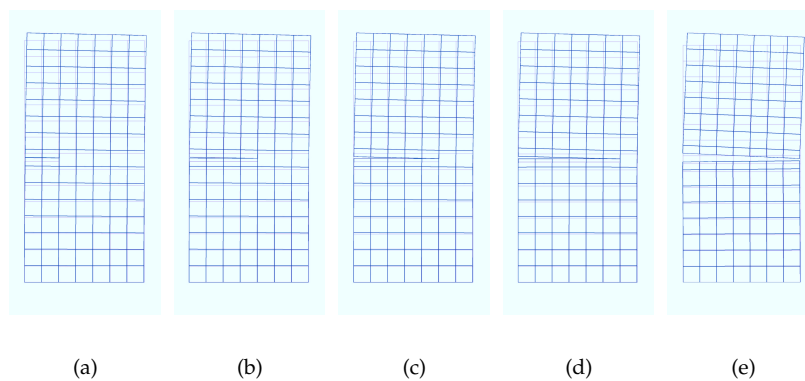


Figura 4.28: Lastra rettangolare tesa. Elemento 8Q/lin. Analisi 8nodiQ. Distribuzione di spostamento trapezoidale. Configurazione deformata. Istanti: (a) 162 ( $\delta=0.162$  mm), (b) 172 ( $\delta=0.172$  mm), (c) 182 ( $\delta=0.182$  mm), (d) 192 ( $\delta=0.192$  mm), e (e) 272 ( $\delta=0.272$  mm).

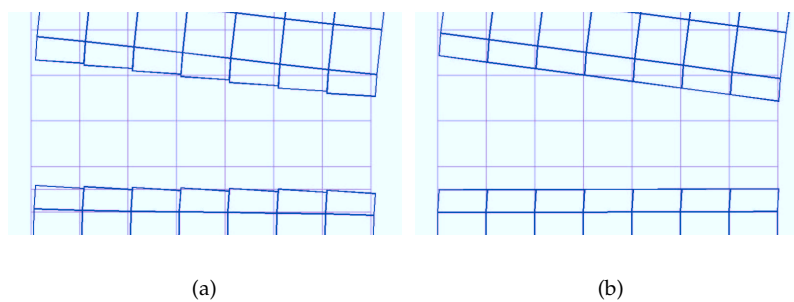


Figura 4.29: Lastra rettangolare tesa. Distribuzione di spostamento trapezoidale. Particolare della configurazione deformata. Confronto tra (a) elementi 4L/cost, istante 152 ( $\delta=0.152$  mm), e (b) elementi 8Q/lin, istante 162 ( $\delta=0.162$  mm).

### 4.2.3 Distribuzione di spostamenti triangolare

In questo paragrafo sono descritti i risultati delle analisi condotte, utilizzando rispettivamente elementi bilineari a quattro nodi con salto costante (4L/cost) ed elementi biquadratici a otto nodi con salto lineare (8Q/lin), applicando una distribuzione di spostamenti lineare triangolare, al fine di valutare gli effetti di un'eccentricità maggiore.

In Figura 4.30 sono riportati gli andamenti della risultante delle trazioni in funzione dello spostamento impresso per ambedue le analisi, dal cui confronto si osservano notevoli differenze. Dalla Tabella 4.6 si nota che l'analisi condotta con elementi a quattro nodi (4nodiL) sovrastima il carico di picco di circa l'8% rispetto all'analisi condotta con elementi a otto nodi (8nodiQ), mentre del il carico ultimo risulta maggiore del 40% circa.

Tabella 4.6: Lastra rettangolare tesa: distribuzione triangolare.

Analisi	Elem/ Salto	Tempo [sec]	$\delta_p$ [mm]	$F_p$ [N]	$F_u$ [N]	$\mathcal{E}_u$ [Nmm]
4nodiL	4L/cost	3977	0.0314	156	63	4.871
8nodiQ	8Q/lin	25442	0.0277	145	46	0.300

Nelle Figure 4.32(a) e 4.32(b) sono riportati, per entrambe le analisi, rispettivamente in termini totali ed in termini incrementali, gli andamenti dell'energia immagazzinata dal continuo elastico (curva in blu), dell'energia dissipata dall'interfaccia (curva in rosso) e l'energia immessa nel sistema (curva in verde). Dal confronto di tali curve si evince che il bilancio energetico è soddisfatto in corrispondenza di tutti i passi dell'analisi, in entrambi i casi, ma l'analisi condotta con elementi bilineari sovrastima l'energia di deformazione del continuo, che risulta crescente per valori dello spostamento impresso massimo  $\delta$  maggiori di quello di picco. Dal confronto tra le Figure 4.27(a) e 4.32(a) si nota come il fenomeno dello shear-locking sia più evidente nel caso di distribuzione triangolare, in quanto il contributo flettente risulta preponderante rispetto a quello normale.

Infine nelle Figure 4.33 e 4.31 sono rispettivamente raffigurati la configurazione deformata del sistema e gli andamenti della componente verticale dello spostamento.

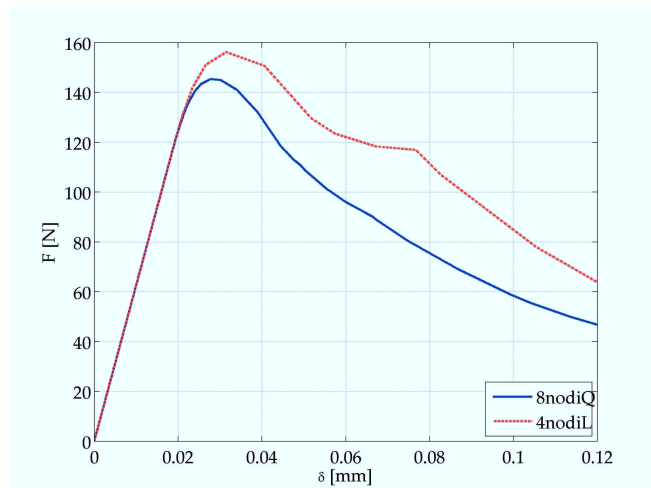


Figura 4.30: Lastra rettangolare tesa. Distribuzione di spostamento triangolare. Confronto tra elementi 4L/cost e 8Q/lin: curva carico spostamento.

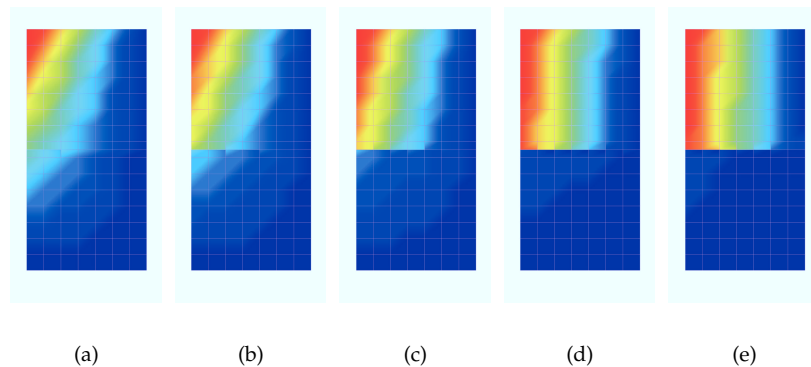
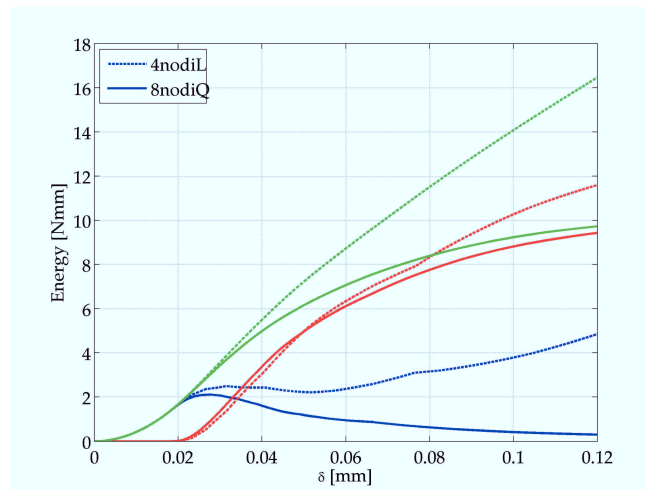
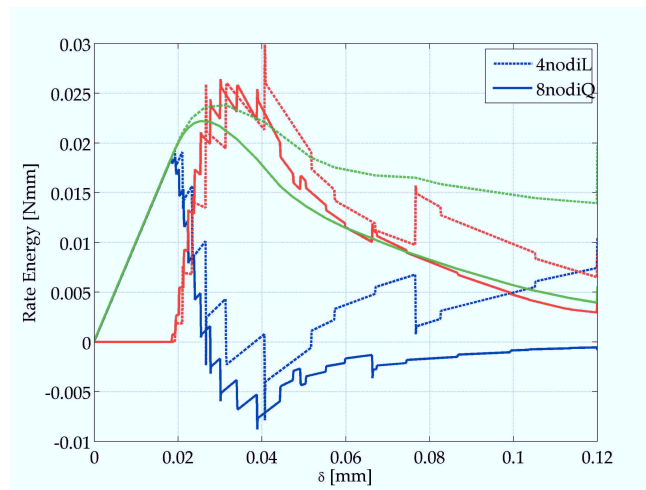


Figura 4.31: Lastra rettangolare tesa. Elemento 8Q/lin. Analisi 8nodiQ. Distribuzione di spostamento triangolare. Spostamento direzione Z. Istanti: (a) 182 ( $\delta=0.182$  mm), (b) 252 ( $\delta=0.252$  mm), (c) 322 ( $\delta=0.322$  mm), (d) 552 ( $\delta=0.552$  mm), e (e) 1004 ( $\delta=1.004$  mm).



(a)



(b)

Figura 4.32: Lastra rettangolare tesa. Distribuzione di spostamento triangolare. Confronto tra elementi 4L/cost e 8Q/lin. Bilancio energetico: (a) in termini totali (b) in termini incrementali.

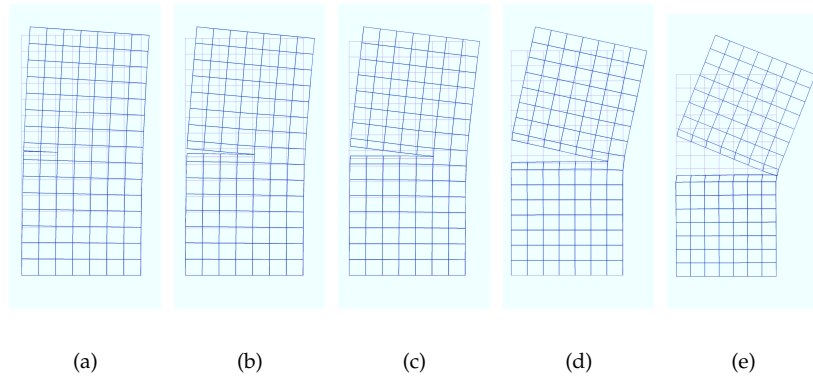


Figura 4.33: Lastra rettangolare tesa. Elemento 8Q/lin. Analisi 8nodiQ. Distribuzione di spostamento triangolare. Configurazione deformata. Istanti: (a) 182 ( $\delta=0.182$  mm), (b) 252 ( $\delta=0.252$  mm), (c) 322 ( $\delta=0.322$  mm), (d) 552 ( $\delta=0.552$  mm), e (e) 1004 ( $\delta=1.004$  mm).

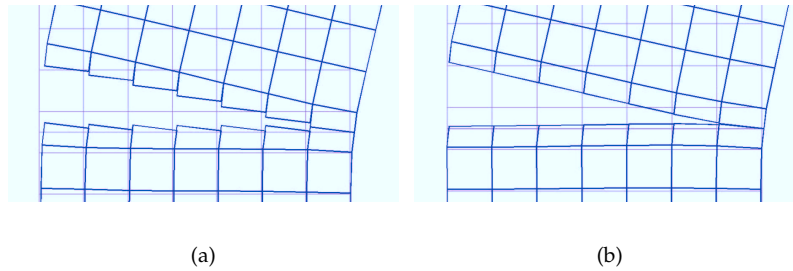


Figura 4.34: Lastra rettangolare tesa. Distribuzione di spostamento triangolare. Particolare della configurazione deformata. Confronto tra (a) elementi 4L/cost, istante 642 ( $\delta=0.642$  mm), e (b) elementi 8Q/lin, istante 562 ( $\delta=0.562$  mm).



### 4.3 Lastra con foro circolare

Si è studiato il comportamento in regime di tensioni piane di una lastra di calcestruzzo rettangolare all'interno della quale è praticato un foro circolare (Figura 4.35). Sui lati verticali dell'elemento sono applicate due distribuzioni di spostamenti costanti al fine di simulare lo stato di trazione uniassiale.

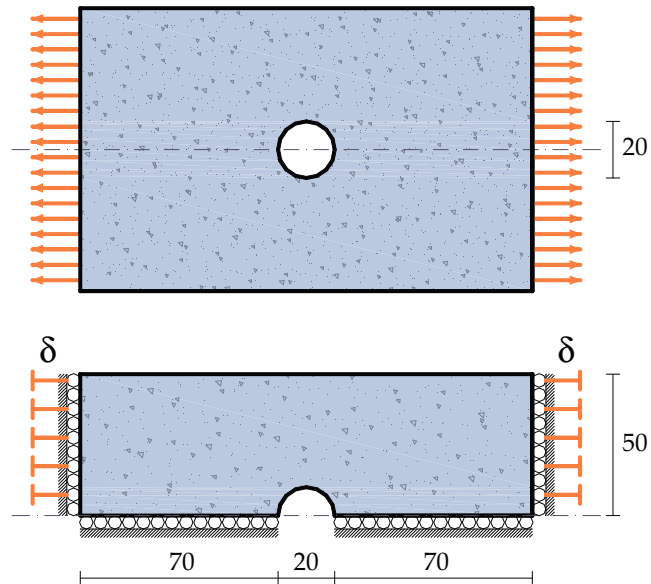


Figura 4.35: Lastra con foro circolare e modello di calcolo. Dimensioni in millimetri.

Si riportano sinteticamente i valori dei parametri costitutivi adottati per il continuo:

- modulo elastico  $E = 28500 \text{ [N/mm}^2\text{]}$
- coefficiente di Poisson  $\nu = 0.2$

per l'interfaccia con softening bilineare:

- resistenza a trazione  $f_0 = 3.3 \text{ [N/mm}^2\text{]}$
- modulo di softening del primo ramo  $H_{S1} = - 66.6 \text{ [N/mm}^3\text{]}$
- modulo di softening del secondo ramo  $H_{S2} = - 6.0 \text{ [N/mm}^3\text{]}$

- apertura critica  $w_{cr} = 0.20$  [mm],

e la relativa funzione di attivazione, corrispondente al criterio della massima tensione normale di Rankine:

$$g_S(\mathbf{t}_S, \chi_S) = \mathbf{t}_S^T \mathbf{n} - f_0 - \chi_S.$$

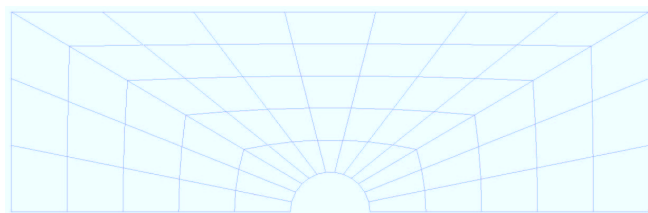
Nella Tabella 4.7 sono riportati a confronto i risultati delle analisi condotte con le tre discretizzazioni schematizzate nella Figura 4.36, utilizzando elementi bilineari con salto costante (4L/cost) ed elementi biquadratici con salto lineare (8Q/lin).

Tabella 4.7: Lastra con foro circolare.

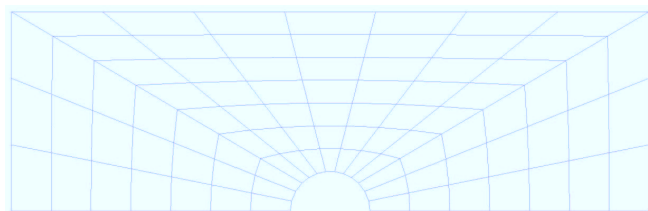
Analisi	Elem/ Salto	Nodi	Tempo [sec]	$\delta_p$ [mm]	$F_p$ [N]	$\mathcal{E}_u$ [Nmm]
LmeshA	4L/cost	84	1194	0.0083	136	0
LmeshB	4L/cost	112	1746	0.0083	134	0
LmeshC	4L/cost	180	3238	0.0084	133	0
QmeshA	8Q/lin	232	4241	0.0083	125	0
QmeshB	8Q/lin	314	7380	0.0084	125	0
QmeshC	8Q/lin	512	20556	0.0084	125	0

Nelle Figure 4.37(a) e 4.37(b) sono riportati a confronto rispettivamente gli andamenti della risultante delle trazioni e dello spostamento trasversale ottenuti attraverso le analisi condotte con le diverse discretizzazioni ed elementi bilineari con salto costante. Un confronto analogo è riportato nelle Figure 4.38(a) e 4.38(b) per gli elementi biquadratici con salto lineare. Tali confronti non mettono in evidenza significative differenze al variare della mesh, confermando il carattere di mesh-independency del metodo, ma, come si evince dalla Figura 4.39(a) e dalla Tabella 4.7, i modelli con salto costante conducono ad una sovrastima del carico di picco dell'8% circa rispetto al corrispondente modello con salto lineare.

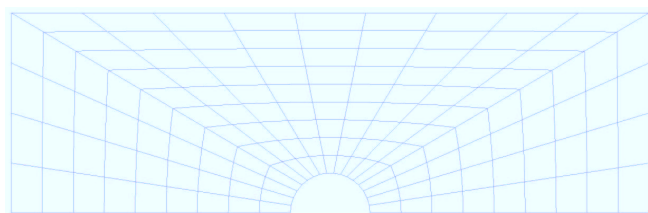
Nelle Figure 4.41 e 4.42 sono riportate le configurazioni deformate al variare della discretizzazione e del tipo di elementi utilizzati.



(a)

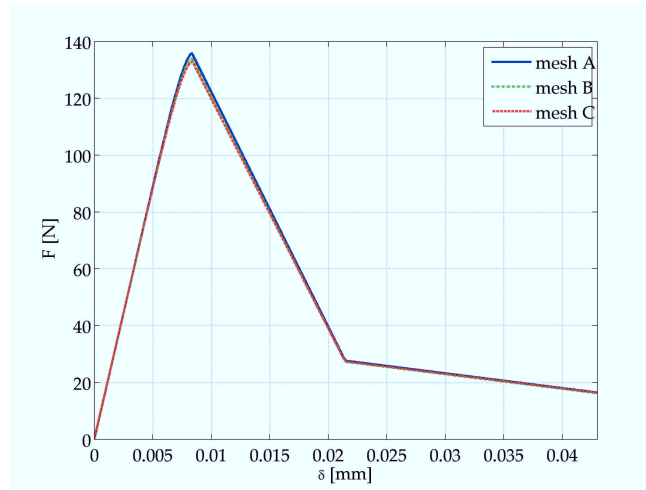


(b)

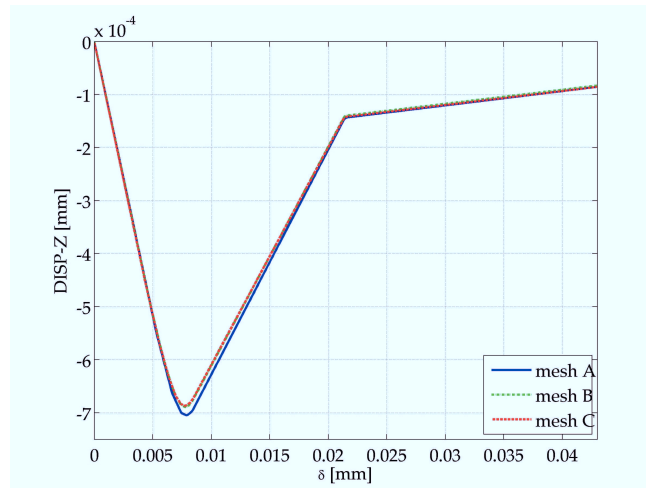


(c)

Figura 4.36: Lastra con foro circolare. Discretizzazioni adottate: (a) mesh A, (b) mesh B e (c) mesh C.

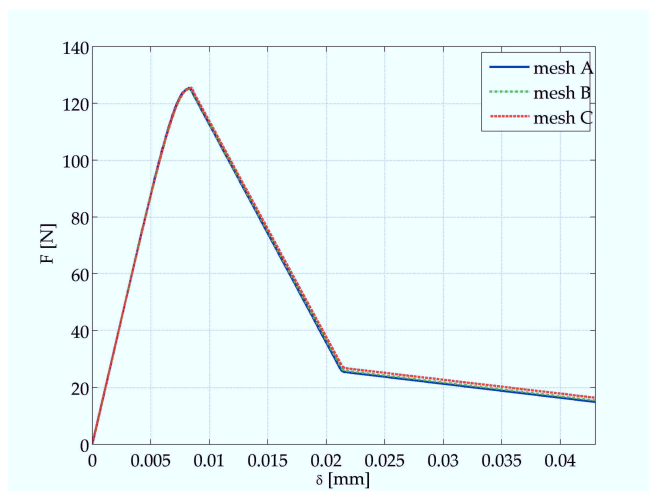


(a)

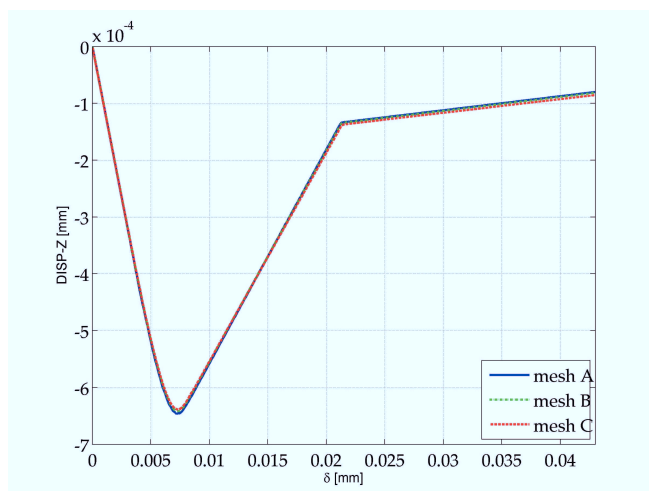


(b)

Figura 4.37: Lastra con foro circolare. Elemento 4L/cost. Confronti tra le discretizzazioni mesh A, mesh B e mesh C: (a) curva carico spostamento (b) spostamento trasversale.

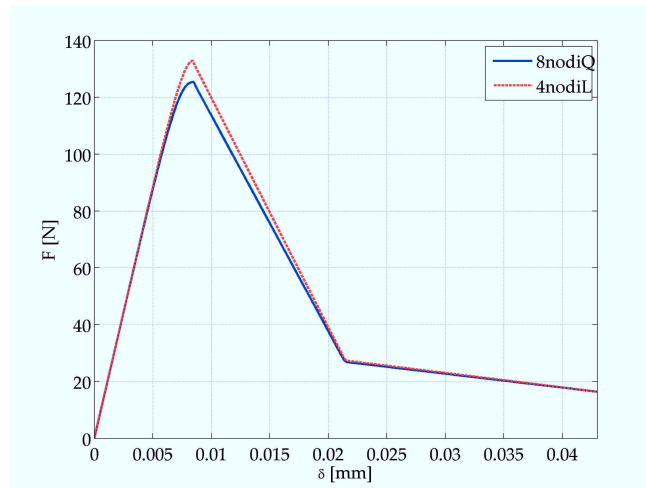


(a)

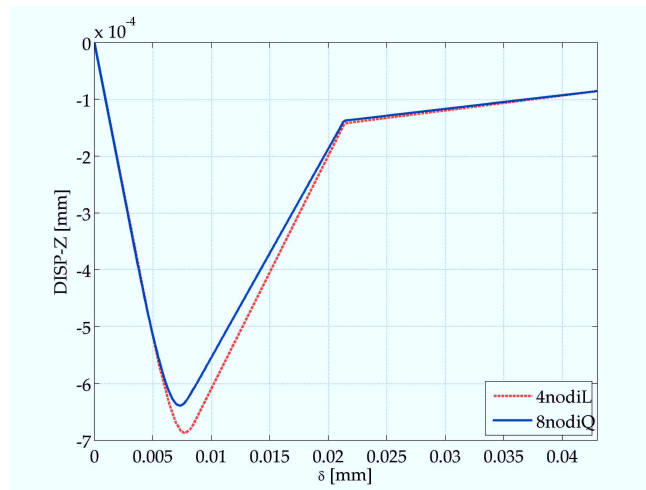


(b)

Figura 4.38: Lastra con foro circolare. Elemento 8Q/lin. Confronti tra le discretizzazioni mesh A, mesh B e mesh C: (a) curva carico spostamento (b) spostamento trasversale.

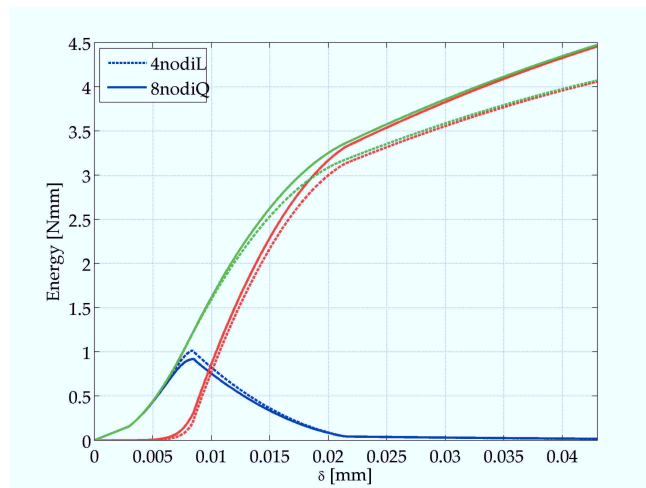


(a)

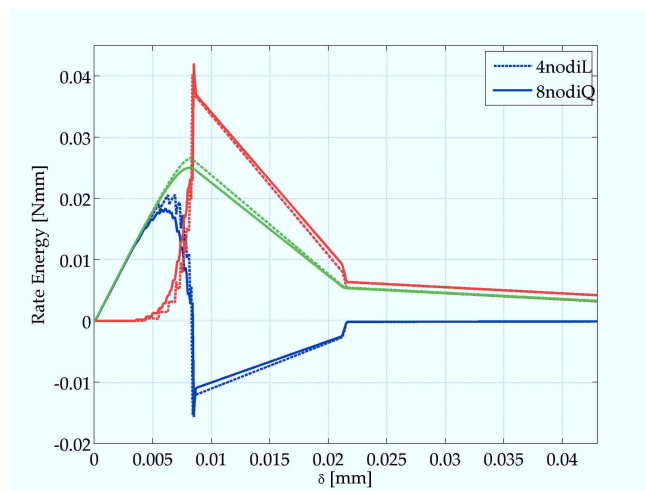


(b)

Figura 4.39: Lastra con foro circolare. Mesh C. Confronto tra elementi 4L/cost e 8Q/lin: (a) curva carico spostamento (b) spostamento trasversale.



(a)



(b)

Figura 4.40: Lastra con foro circolare. Mesh C. Confronto tra elementi 4L/cost e 8Q/lin. Bilancio energetico: (a) in termini totali (b) in termini incrementali.

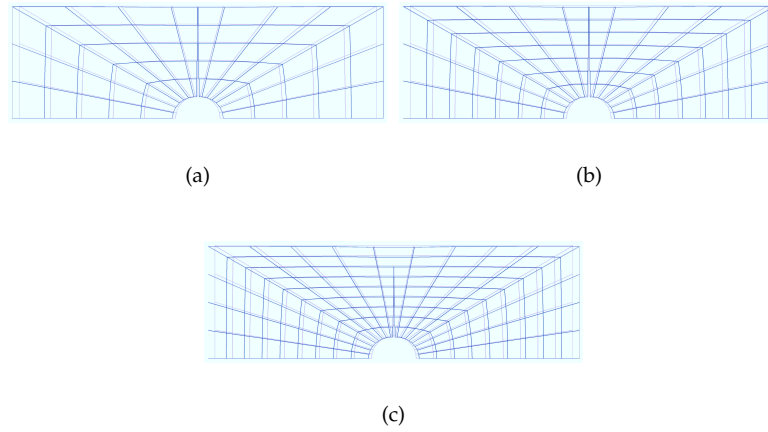


Figura 4.41: Lastra con foro circolare. Elemento 4L/cost. Configurazione deformata. Discretizzazioni: (a) mesh A, (b) mesh B e (c) mesh C.

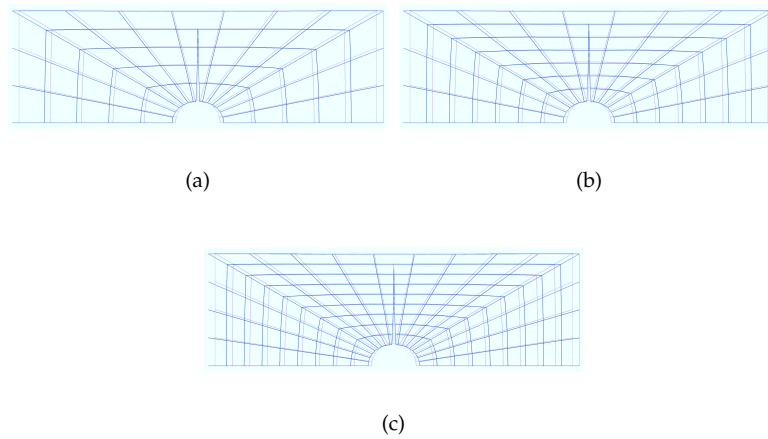


Figura 4.42: Lastra con foro circolare. Elemento 8Q/lin. Configurazione deformata. Discretizzazioni: (a) mesh A, (b) mesh B e (c) mesh C.